

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej ($t = 0$) filiżanka z gorącą kawą znajduje się w pokoju, a temperatura tej kawy jest równa $80\text{ }^{\circ}\text{C}$. Temperatura w pokoju (temperatura otoczenia) jest stała i równa $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Temperatura T tej kawy zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$T(t) = (T_p - T_z) \cdot k^{-t} + T_z \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

T – temperatura kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

t – czas wyrażony w minutach, liczony od chwili początkowej,

T_n – temperatura początkowa kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

T_z – temperatura otoczenia wyrażona w stopniach Celsjusza,

k – stała charakterystyczna dla danej cieczy.

Po 10 minutach, licząc od chwili początkowej, kawa ostygła do temperatury 65°C .

1.
0-1-2

1.
0-1-2

Oblicz temperaturę tej kawy po następnych pięciu minutach. Wynik podaj w stopniach Celsjusza, w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Oblicz granicę

0-1-2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2}$$

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 3. (0–3)

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe 0,01. Kontroli poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań poddanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form a uniform pattern of small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

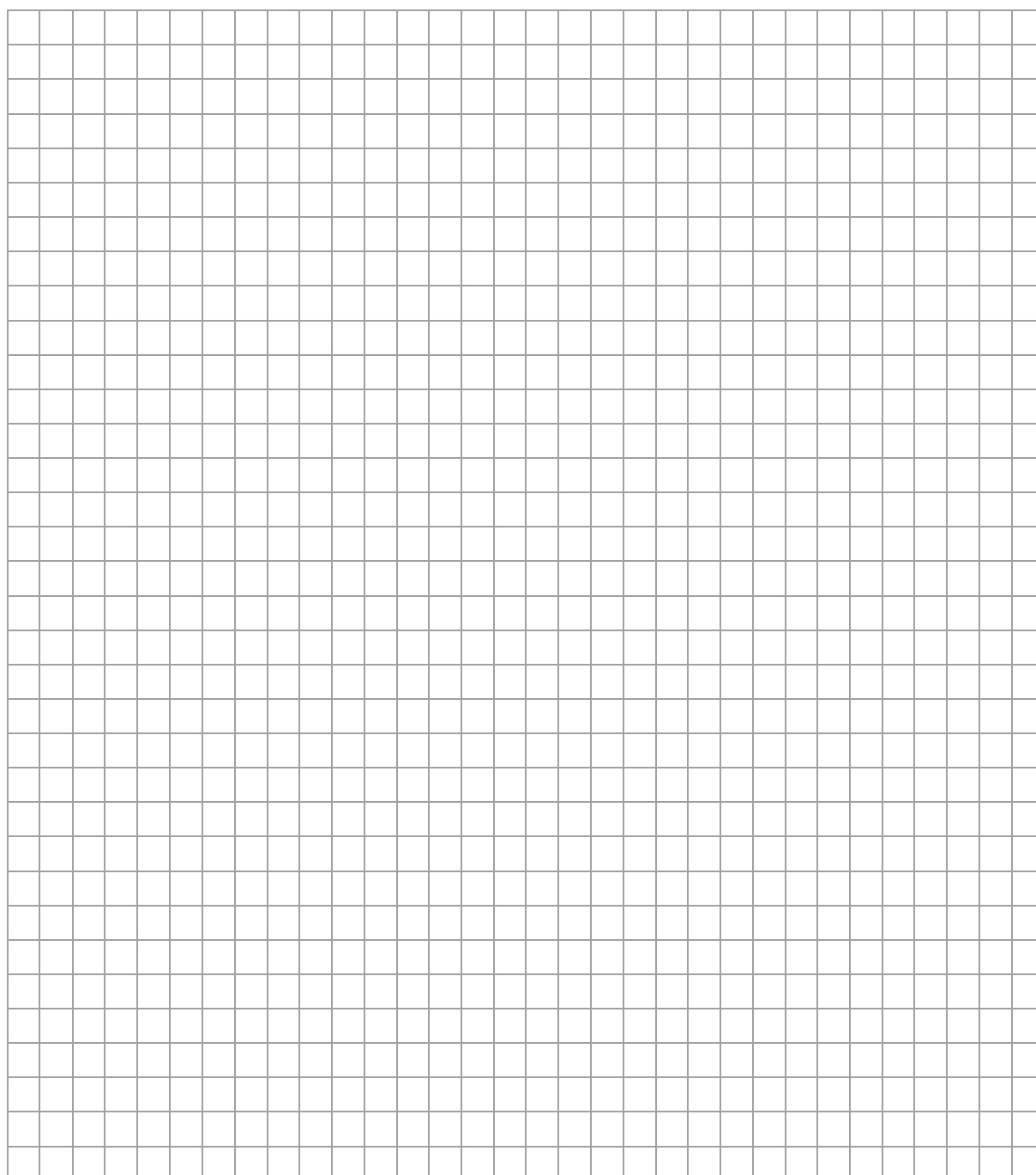
Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt P , o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f . Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P .

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej. Zapisz obliczenia.



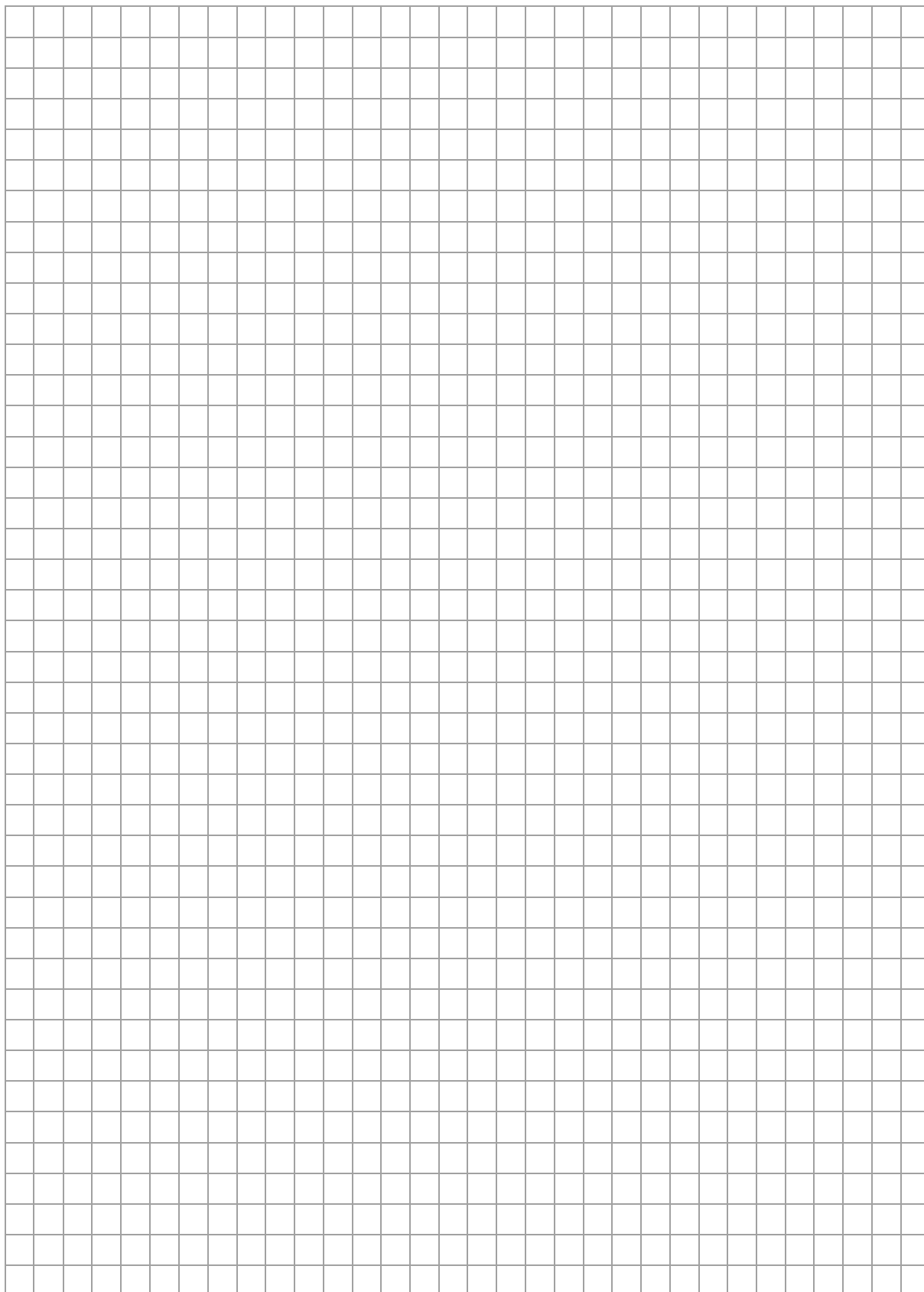
4.

0–1–
2–3

5.

0-1-
2-3**Zadanie 5. (0-3)**

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$.



Zadanie 6. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się
jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

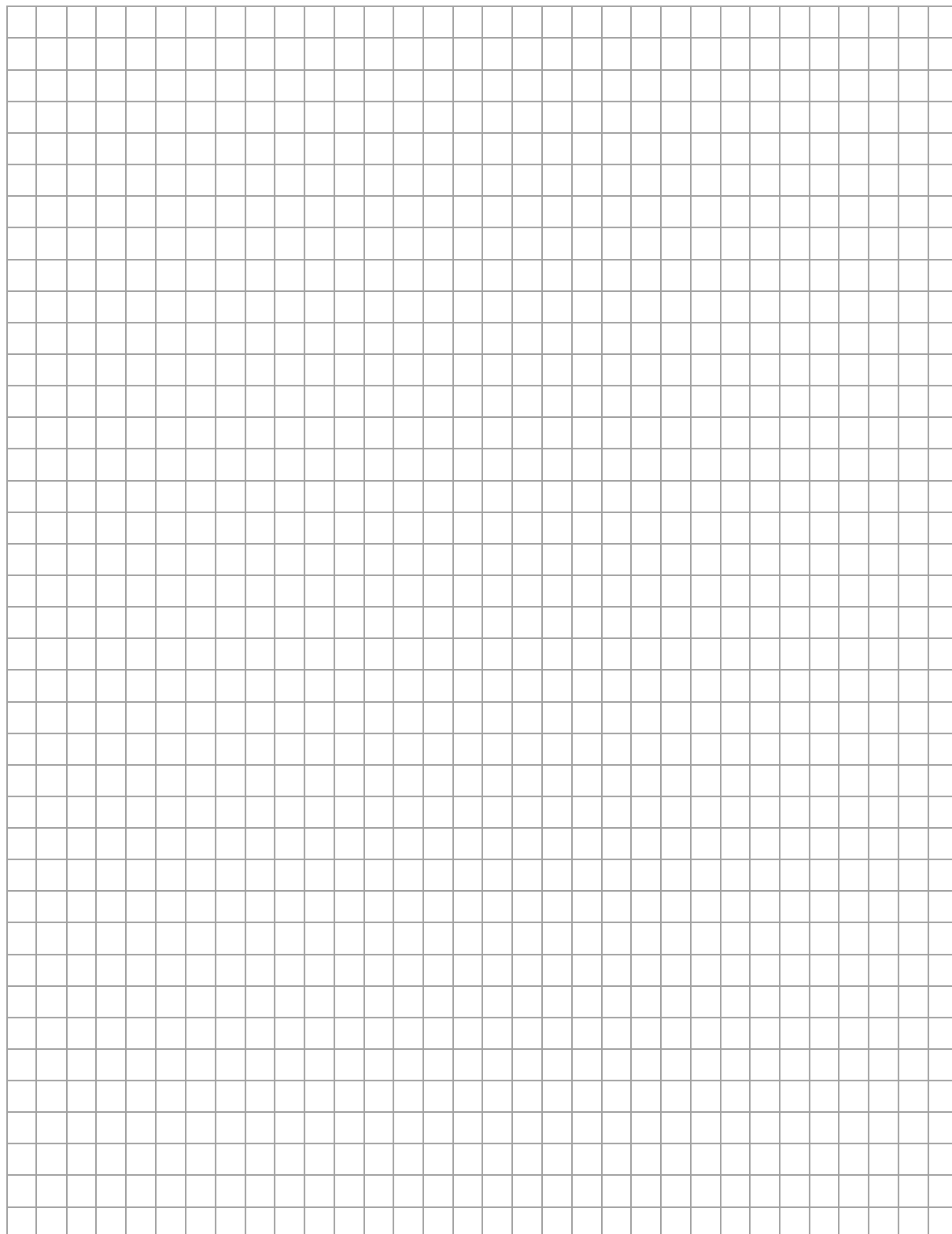
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

6.
0-1- 2-3

6.
0-1- 2-3

Zadanie 7. (0–4)

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

7.0–1–
2–3–4**Oblicz x, y oraz z . Zapisz obliczenia.**

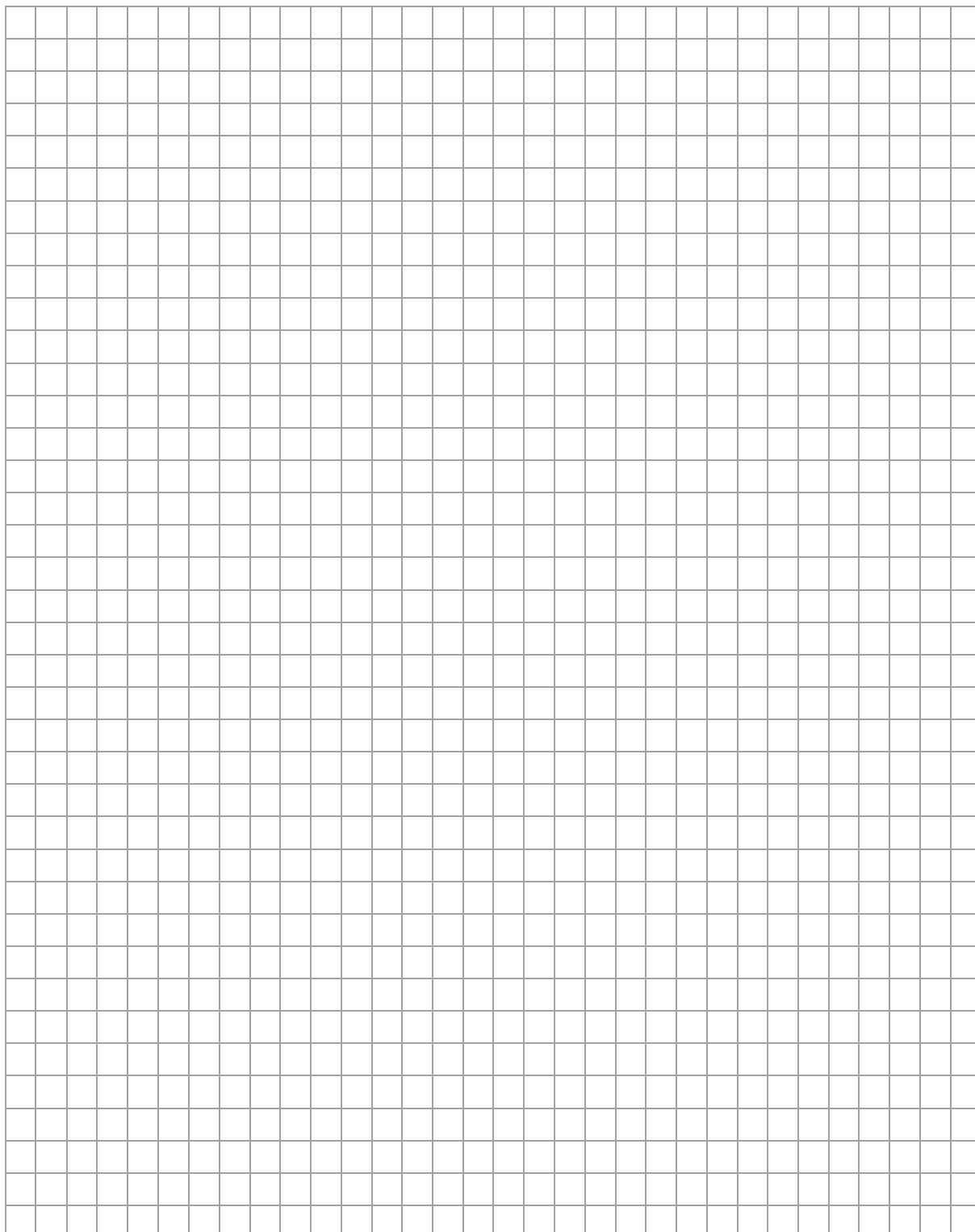
Zadanie 8. (0–4)

Dany jest trójkąt ABC , który nie jest równoramienny. W tym trójkącie miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC .

8.0–1–
2–3–4

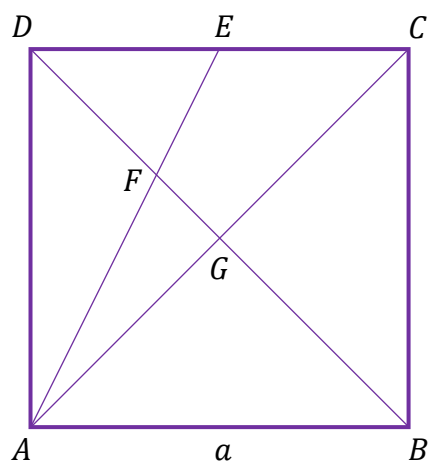
Wykaż, że długości boków tego trójkąta spełniają warunek

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

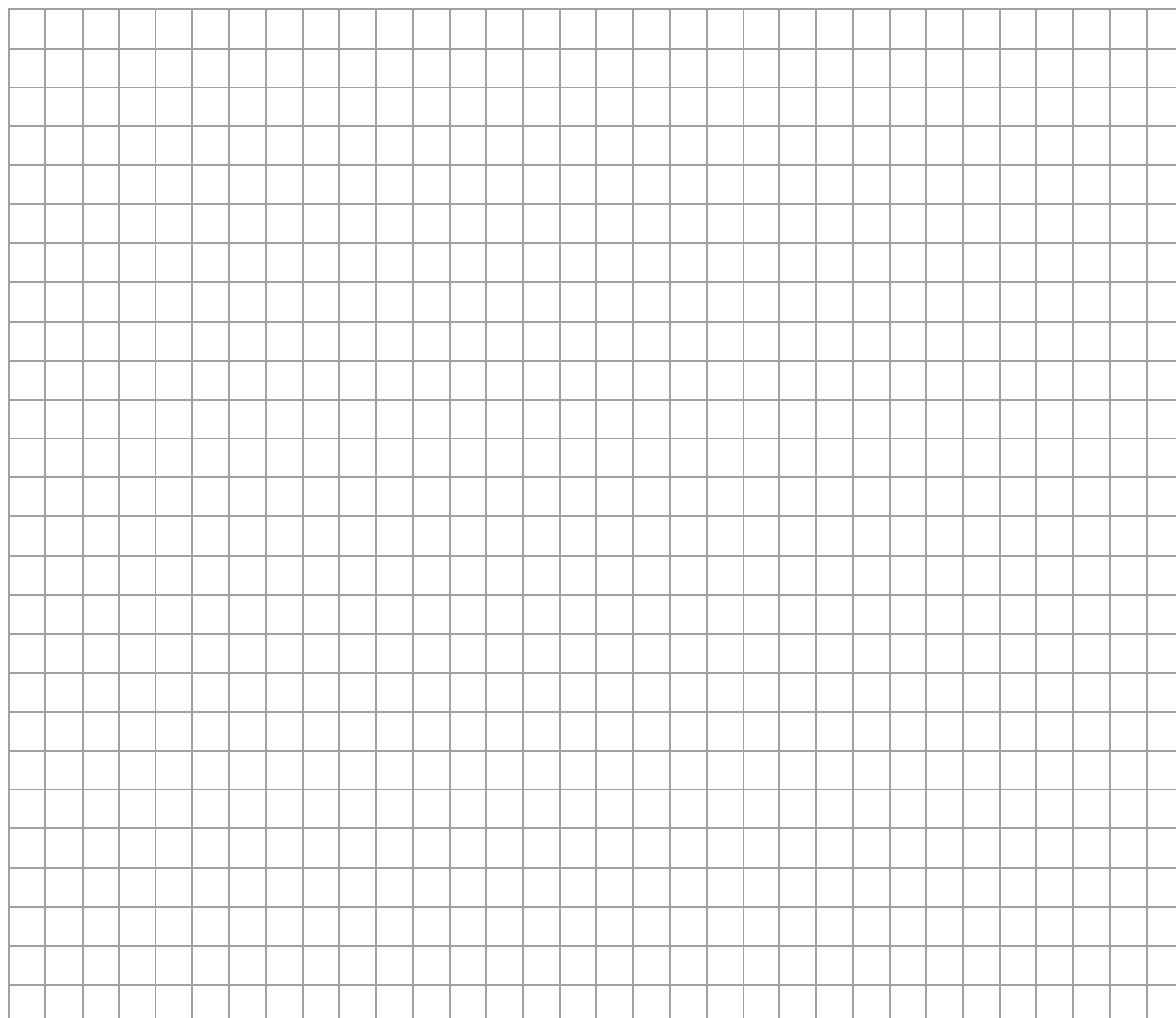


Zadanie 9. (0–4)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości a . Punkt E jest środkiem boku CD . Przekątna BD dzieli trójkąt ACE na dwie figury: AGF oraz $CEFG$ (zobacz rysunek).

**9.**0–1–
2–3–4

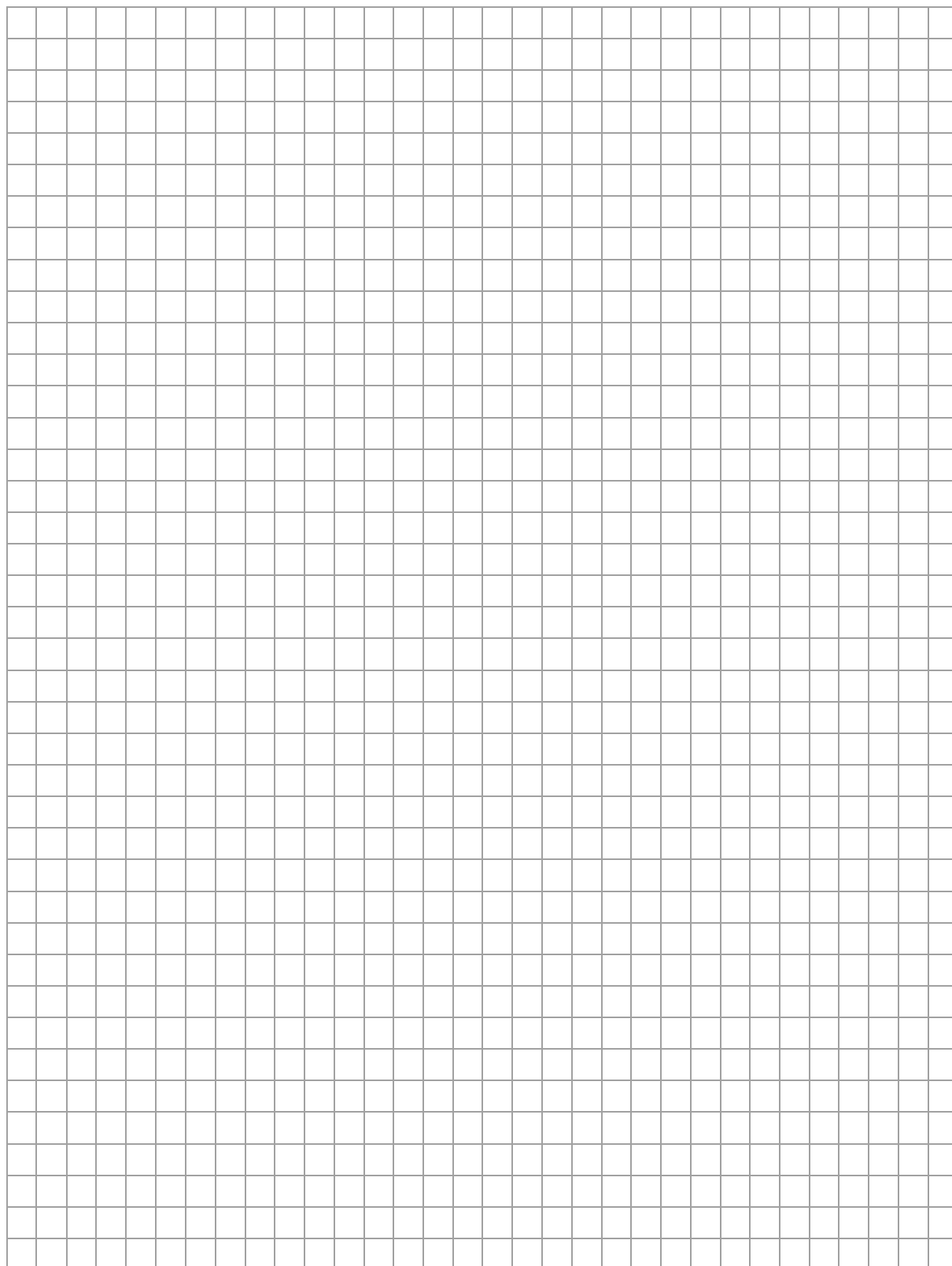
Oblicz pola figur AGF oraz $CEFG$. Zapisz obliczenia.



10.

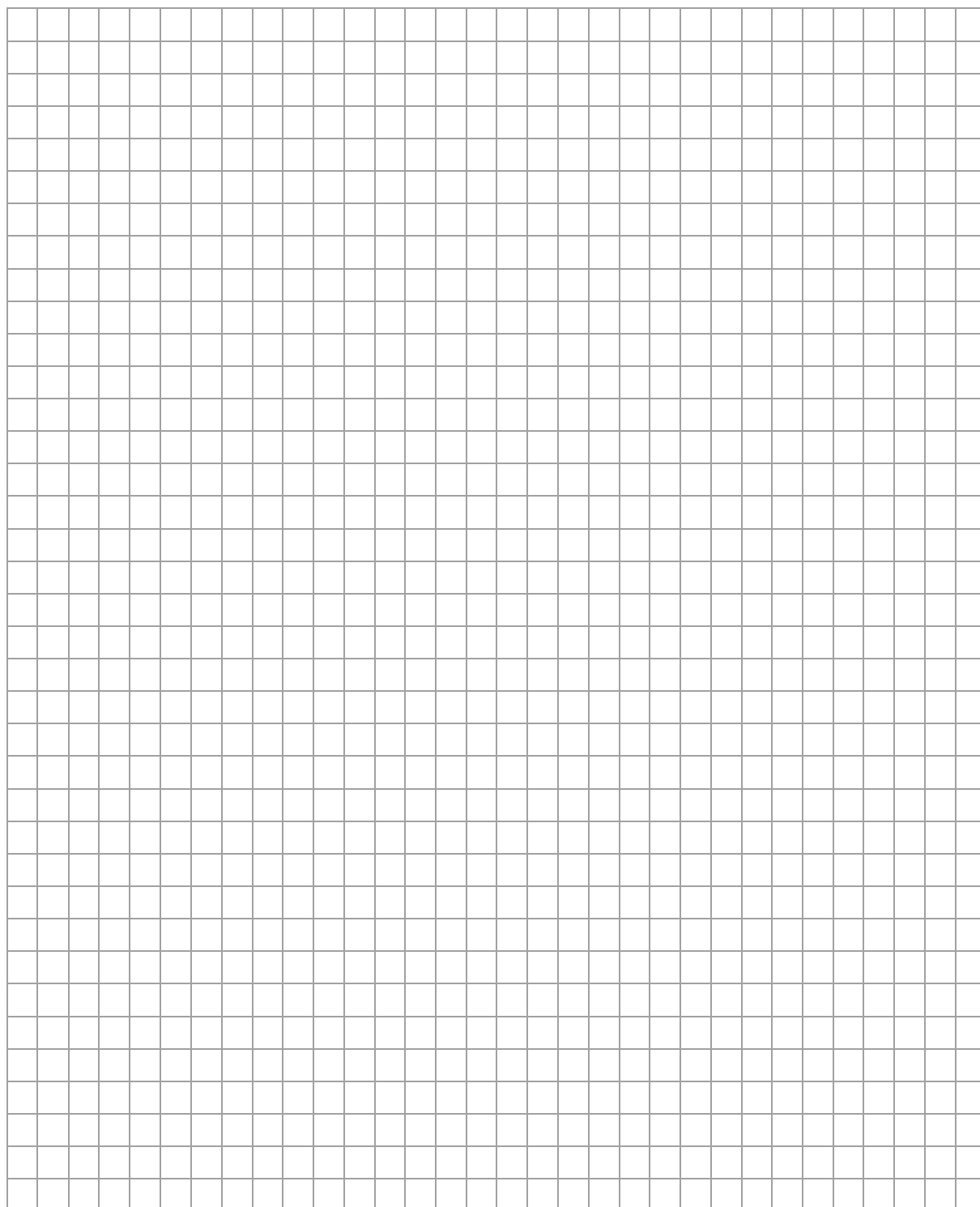
0-1-
2-3-
4-5**Zadanie 10. (0-5)****Rozwiąż równanie**

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

w zbiorze $[0, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1, 2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C . Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15.

11.0–1–
2–3–
4–5**Oblicz współrzędne punktu S . Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.**

0-1-
2-3-
4-5-6

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (3m + 1) \cdot x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

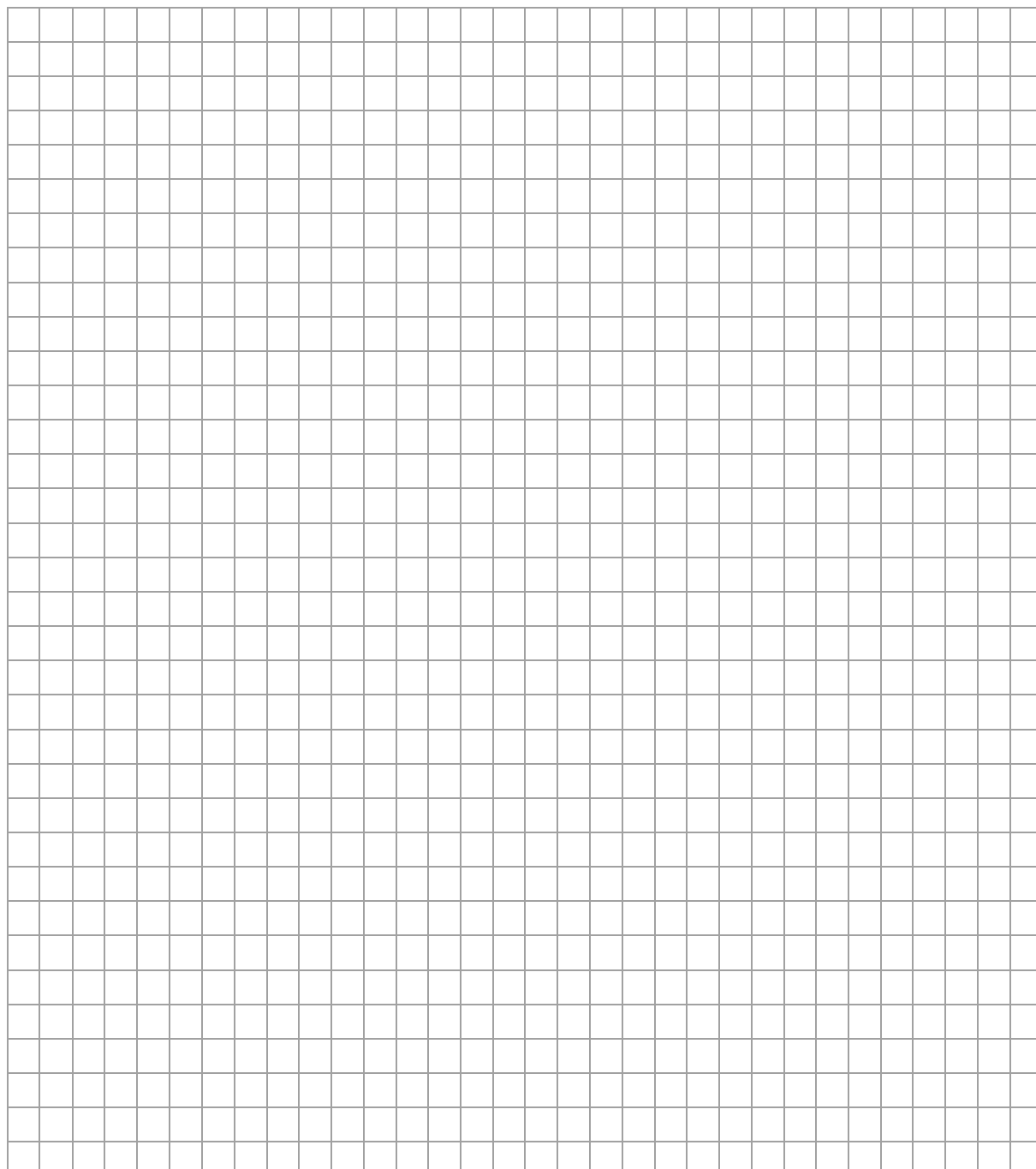
Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

13.1.

0–1–2



Zadanie 13.2. (0–4)

Pole P powierzchni całkowitej graniastoslupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastoslupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, 8\sqrt{3}]$.

13.2.0–1–
2–3–4

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastoslupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

