

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej ($t = 0$) zainicjowano pewną reakcję chemiczną, w której brał udział związek A.

W wyniku tej reakcji masa m związku A zmieniała się w czasie zgodnie z zależnością

$$m(t) = a \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + b \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

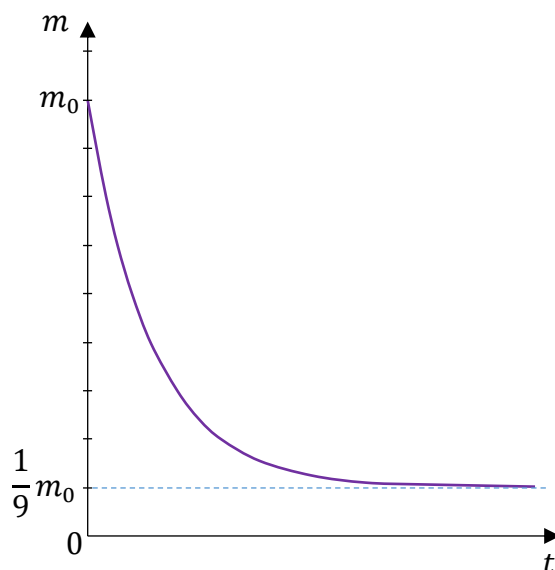
m – masa związku A wyrażona w gramach,

t – czas wyrażony w sekundach (liczony od chwili $t = 0$),

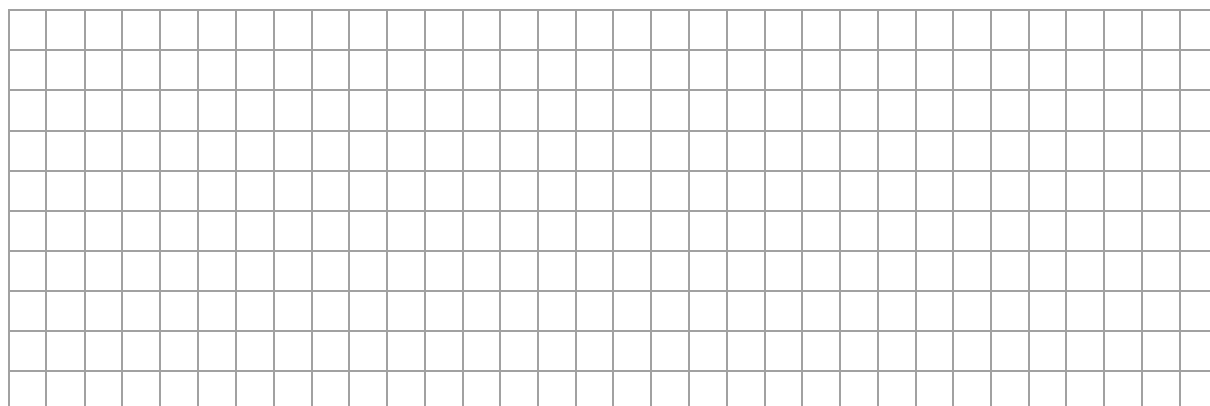
a, b – współczynniki liczbowe.

Masa początkowa związku A (tj. masa w chwili $t = 0$) była równa m_0 gramów.

Po osiągnięciu stanu równowagi (tj. gdy $t \rightarrow \infty$) masa tego związku była równa $\frac{1}{9}$ jego masy początkowej (zobacz rysunek).



Oblicz, po ilu sekundach (licząc od chwili zainicjowania tej reakcji) przereagowało 87,5 % masy początkowej tego związku. Zapisz obliczenia.



Zadanie 2. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{x^2 - 9}$$

Zapisz obliczenia.

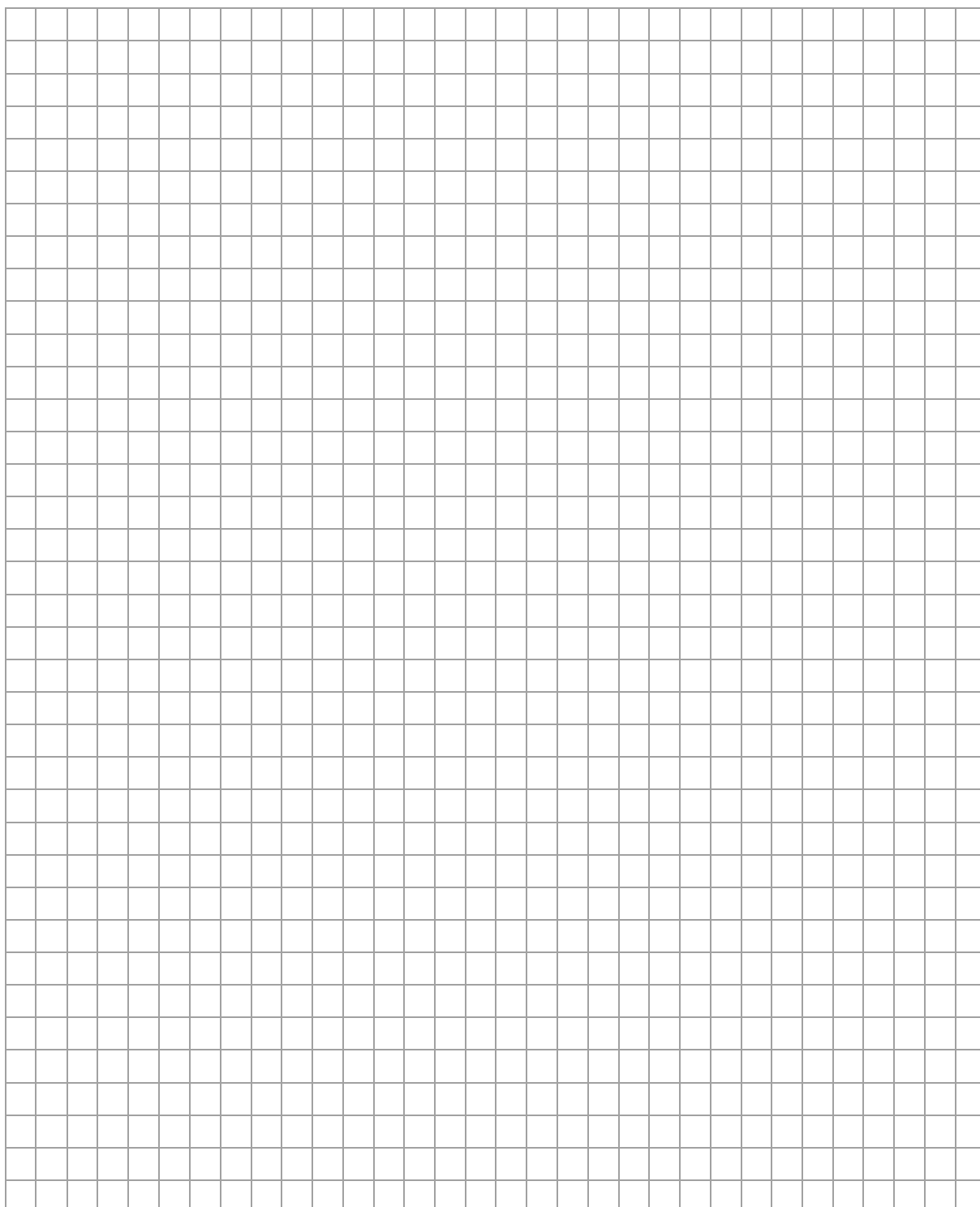
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (x_0, 5)$ należy do wykresu funkcji f .

**Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .
Zapisz obliczenia.**



Zadanie 4. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

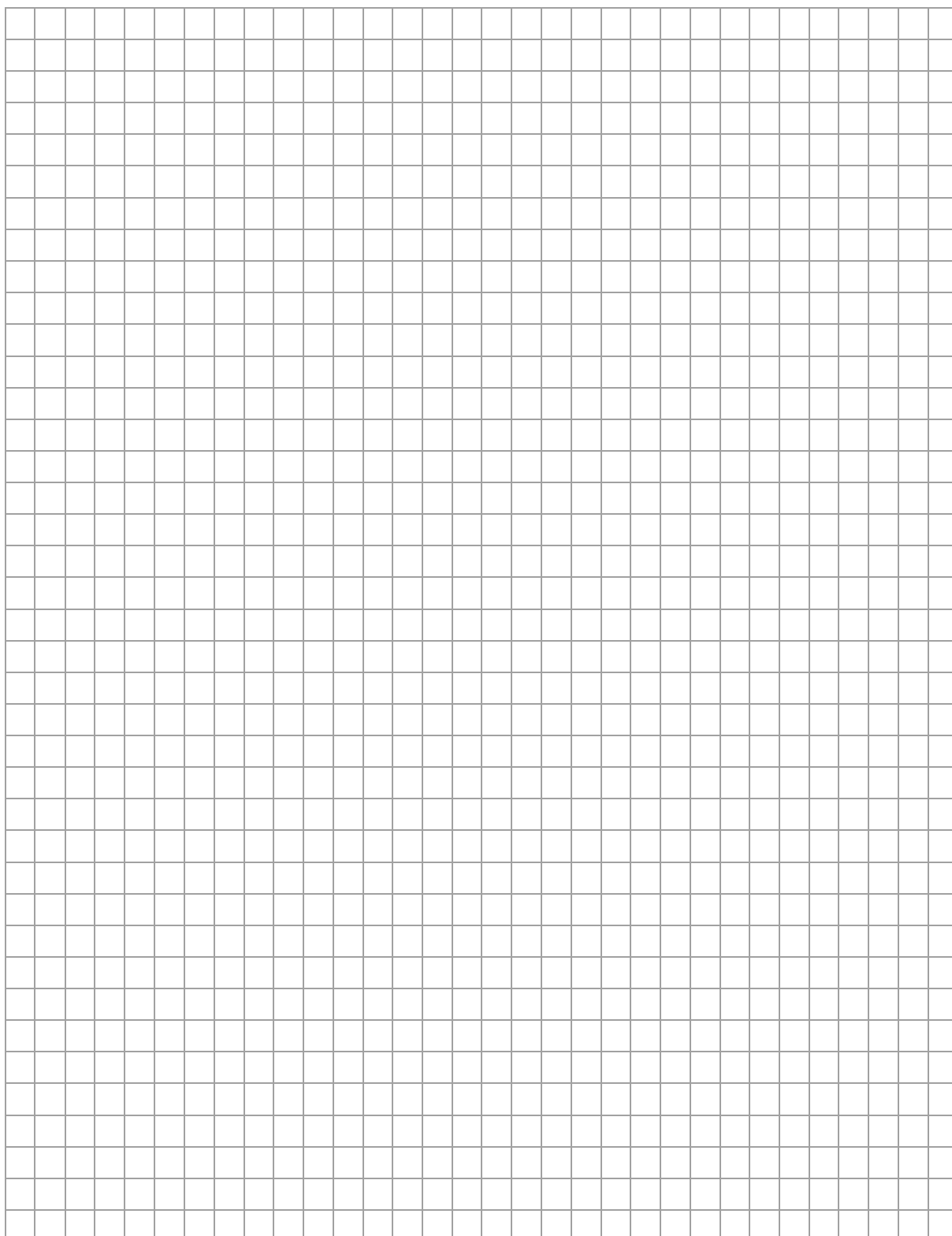
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 5. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

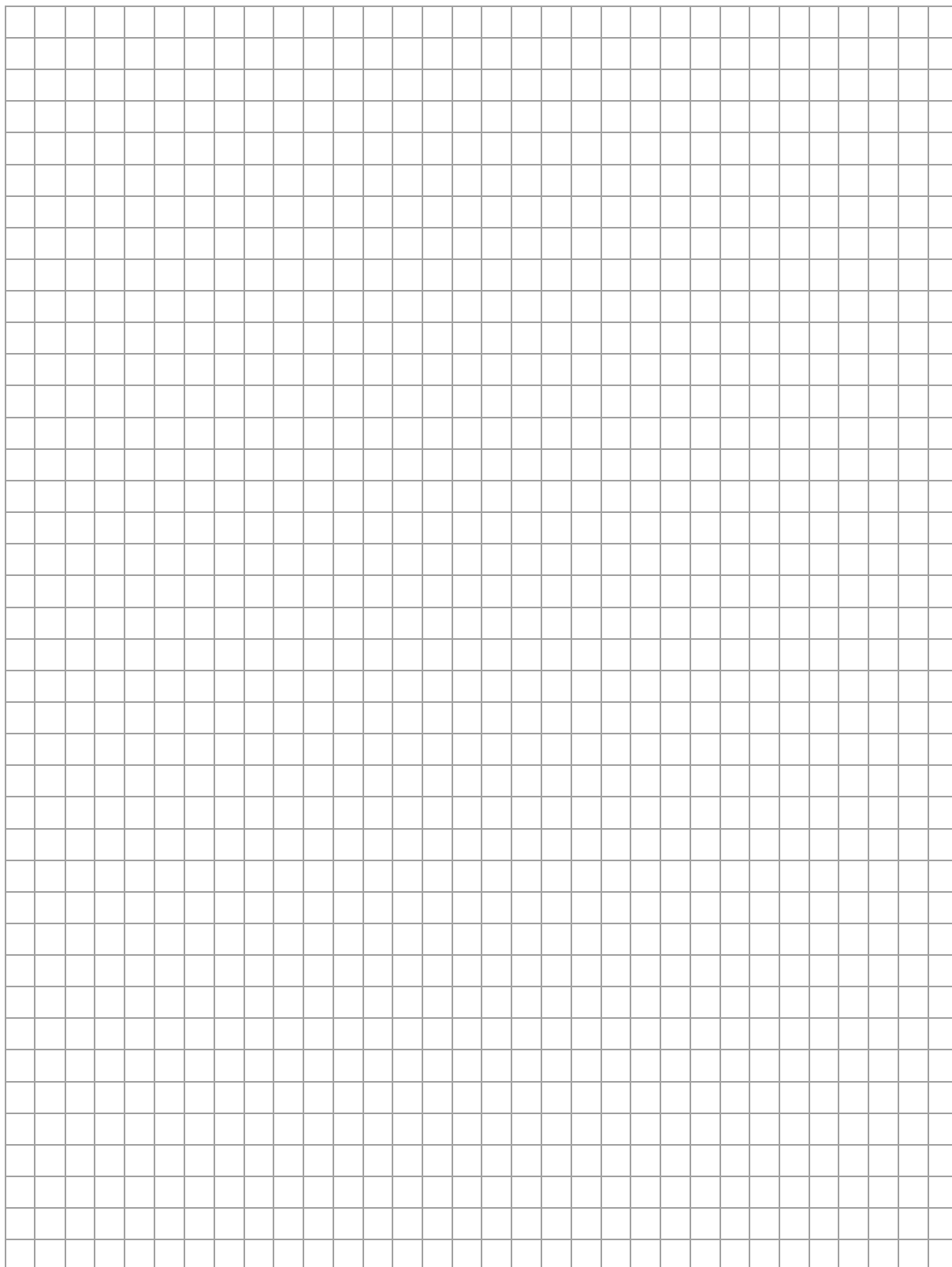
$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$



Zadanie 6. (0–3)

Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a oraz b , przy czym $a > b$. W ten trapez można wpisać okrąg.

Wykaż, że pole tego trapezu jest większe od $a \cdot b$.



Zadanie 7. (0–4)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest równa 16, tj.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 16$$

Ponadto $a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2$.

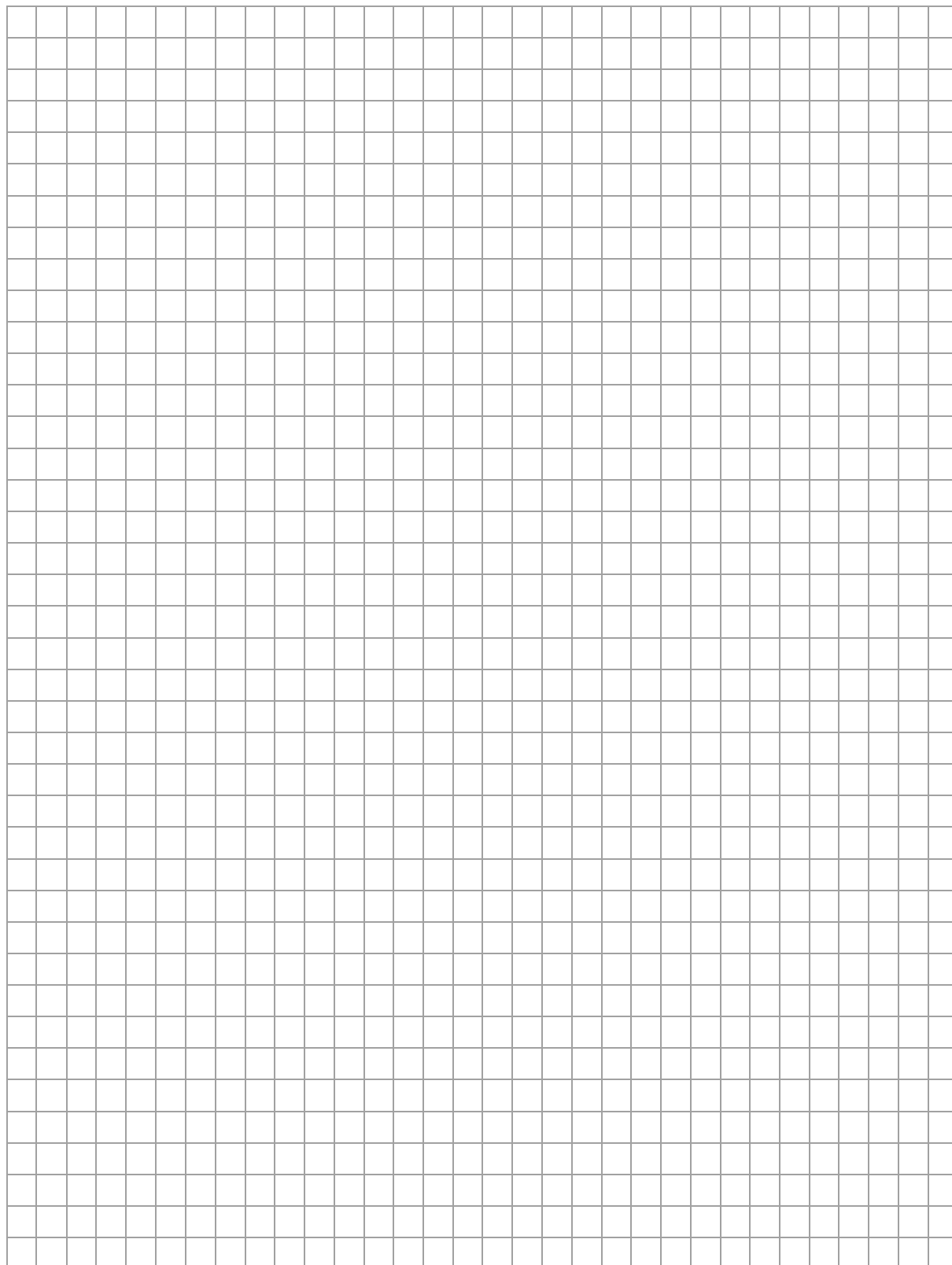
Wyznacz wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 8. (0–4)

W okrąg o promieniu 4 wpisano trójkąt ABC . Długość boku AB jest równa 6. Bok BC ma długość $4\sqrt{3}$ i jest najdłuższym bokiem tego trójkąta.

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 10. (0–4)

Długość krawędzi podstawy graniastopu prawidłowego trójkątnego jest równa a .
Sinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka
graniastopu jest równy $\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

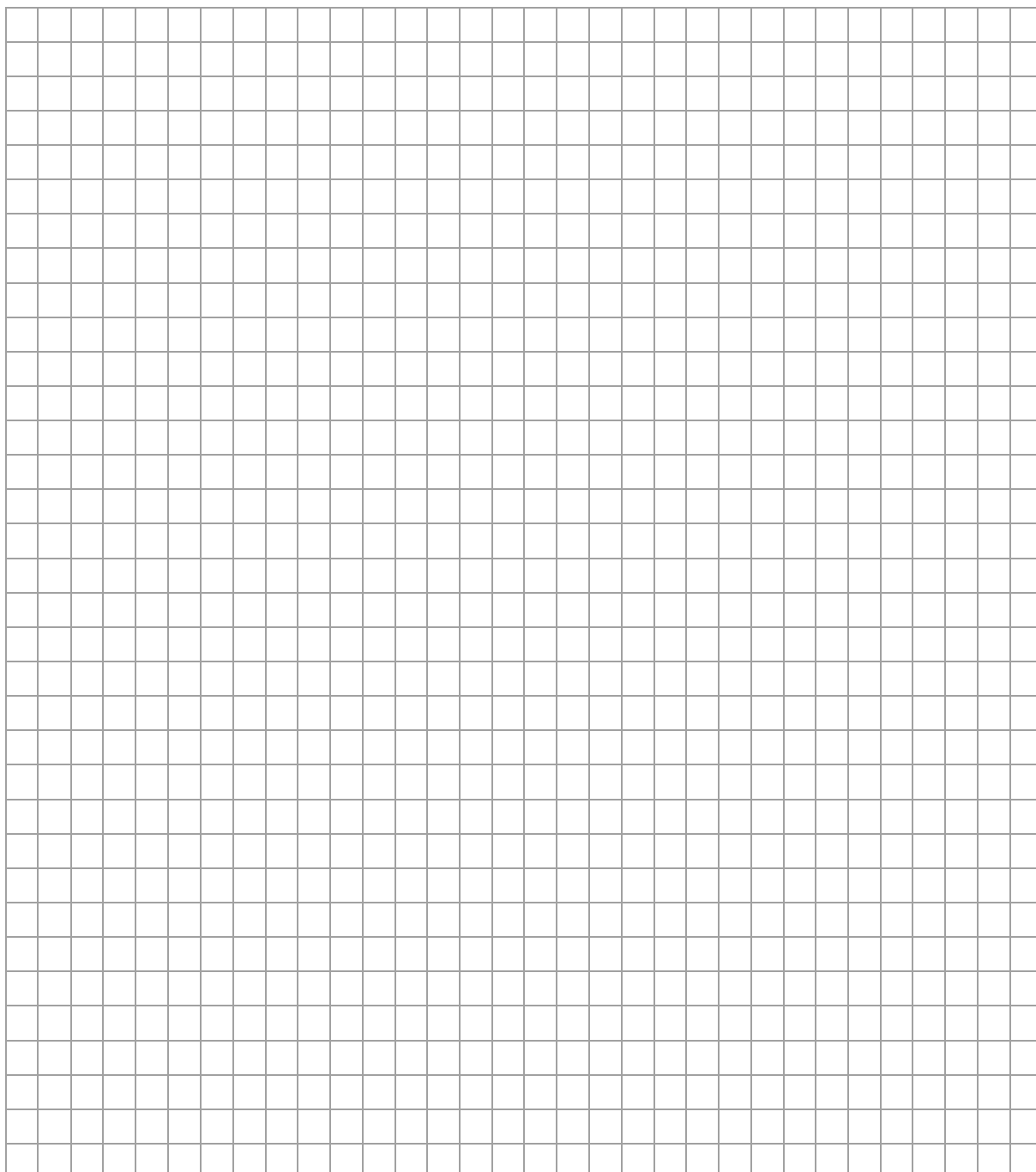
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 11. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $3x + y + 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 - 2x - 8$ w punktach A oraz B , które są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek A ma pierwszą współrzędną ujemną.

Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią. Odległość punktu C od prostej zawierającej bok AB równoległoboku jest równa $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

Oblicz długość boku BC tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.



Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(3 - m) \cdot x^2 + (m + 1) \cdot x - (m + 1)^2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$$

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

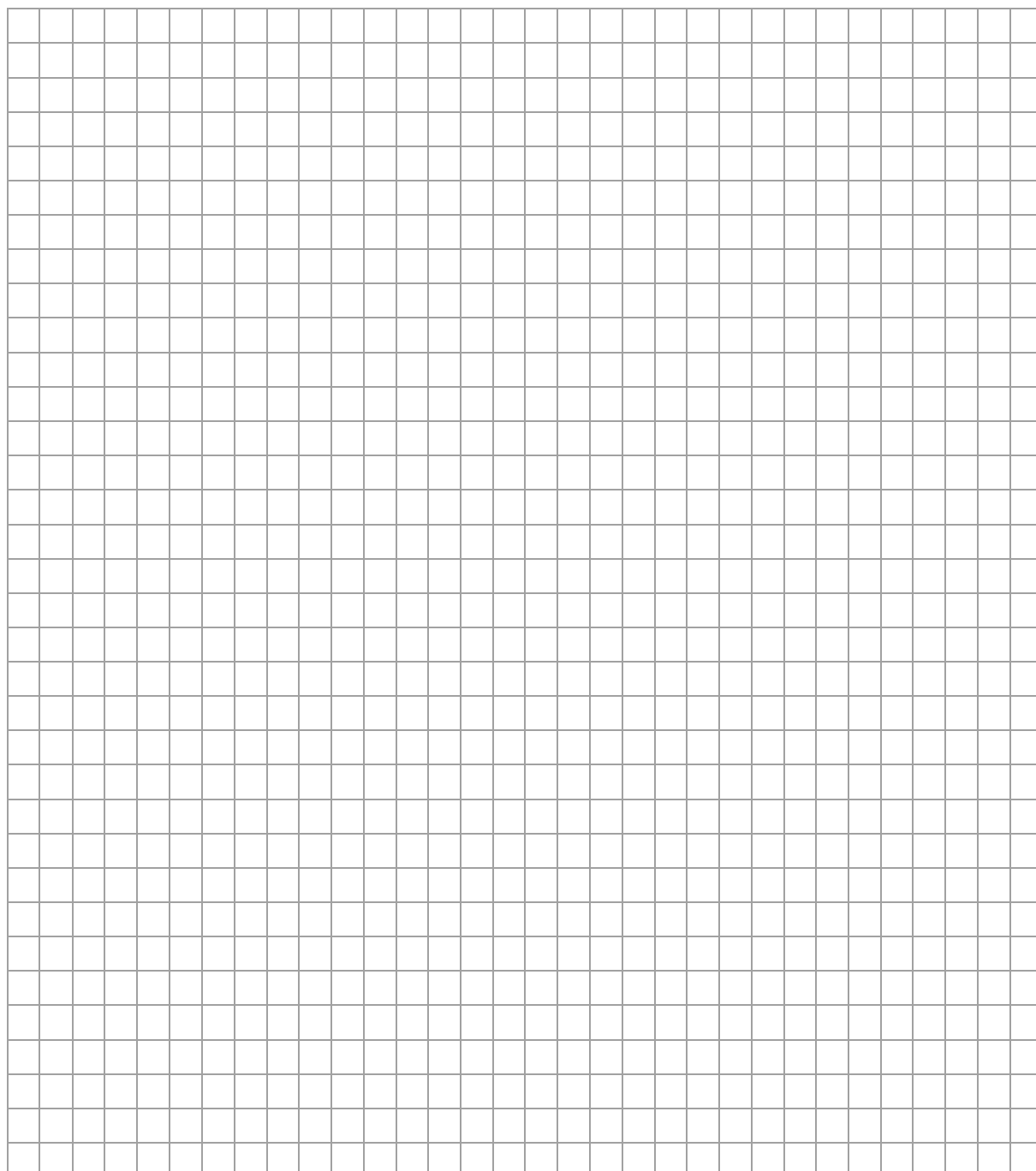
Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma wysokości H ostrosłupa oraz promienia R okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa jest równa 6.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V każdego z takich ostrosłupów w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$



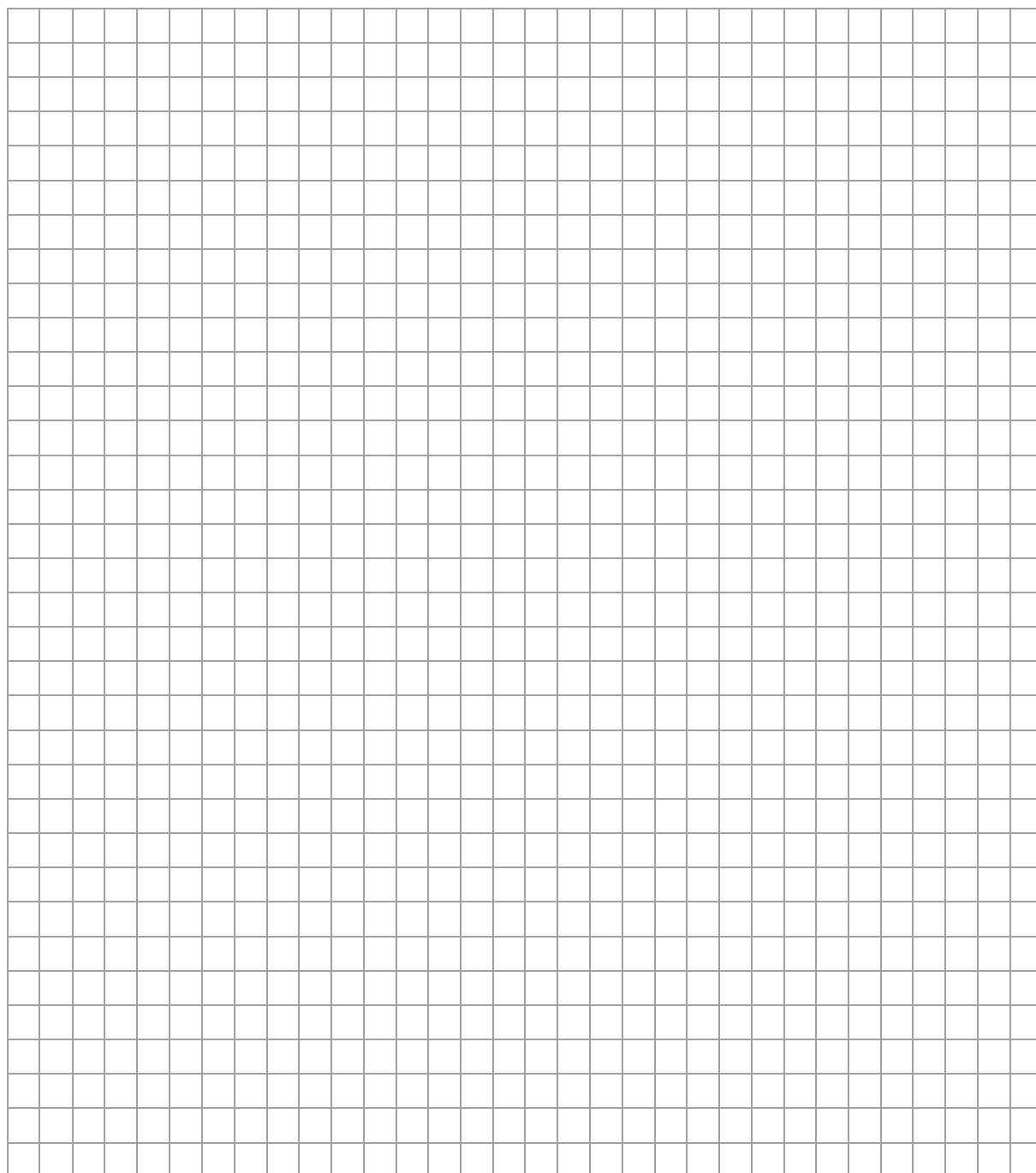
Zadanie 13.2. (0–4)

Objętość V ostrosłupa w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

dla $R \in (0, 6)$.

Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na podstawie tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to write their calculations.