

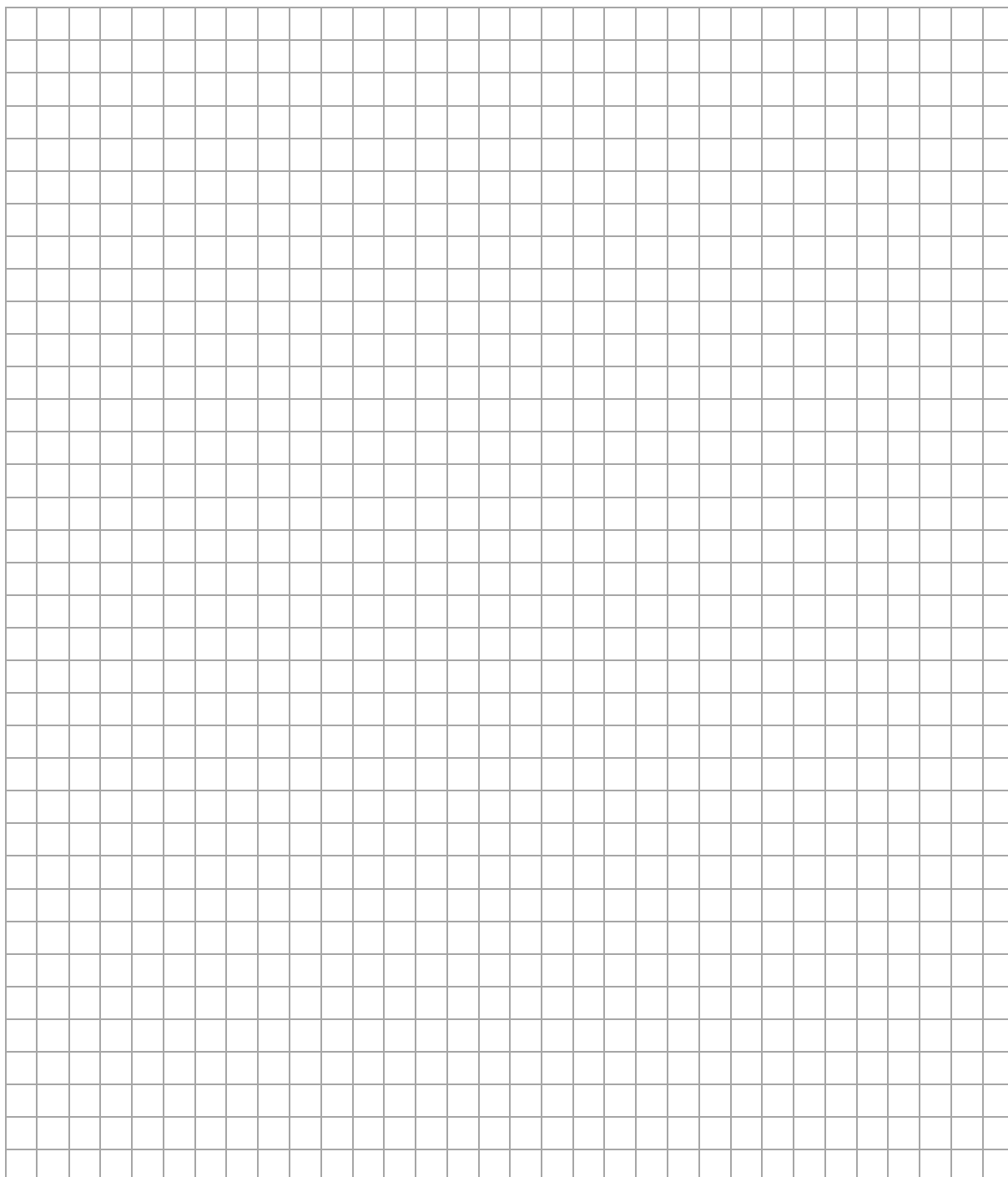
Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej ($t = 0$) masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

1.

0–1–2

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od 1,5 grama. Zapisz obliczenia.



Zadanie 2. (0–3)

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

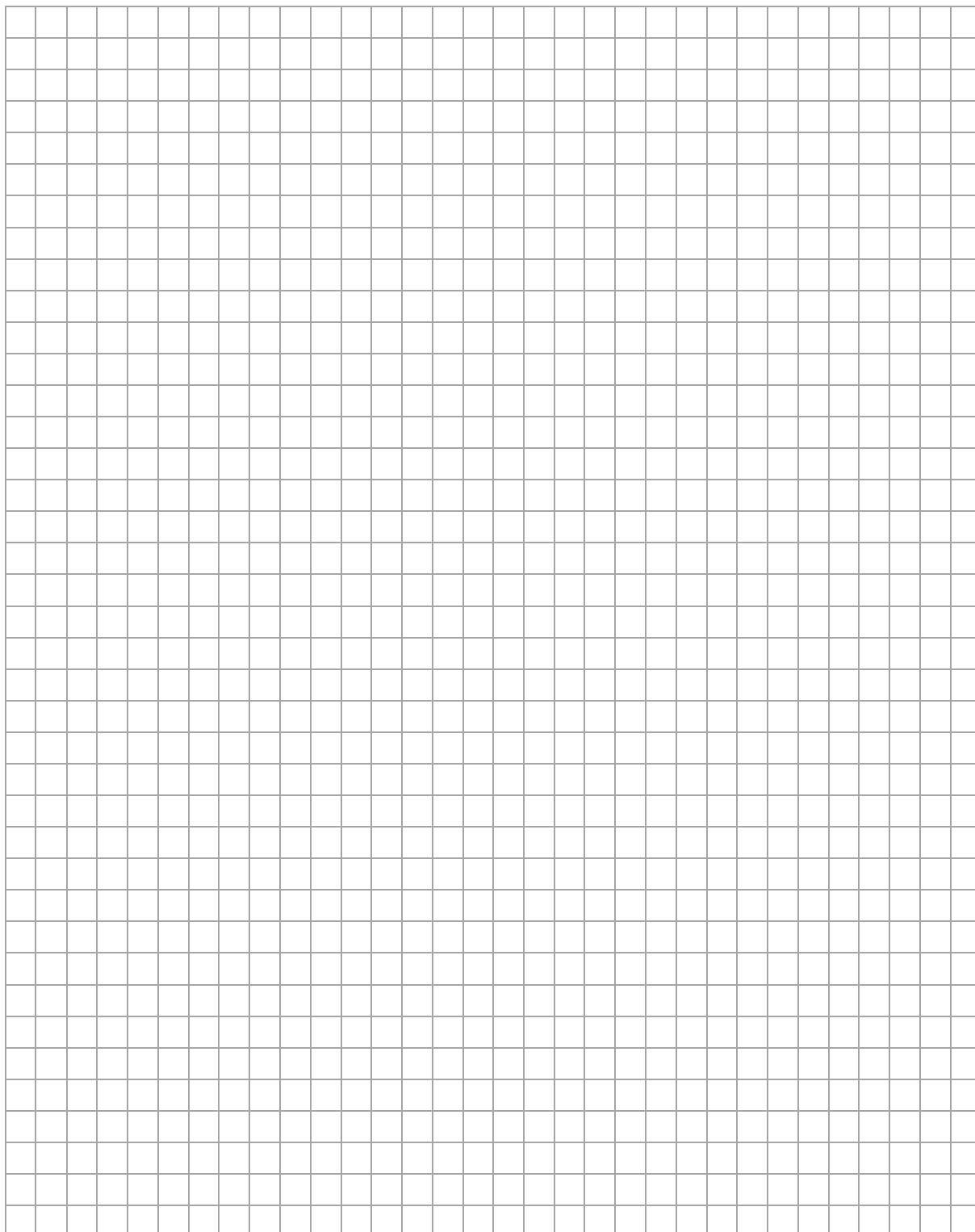
Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Punkt $P = (x_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f .

3.0–1–
2–3

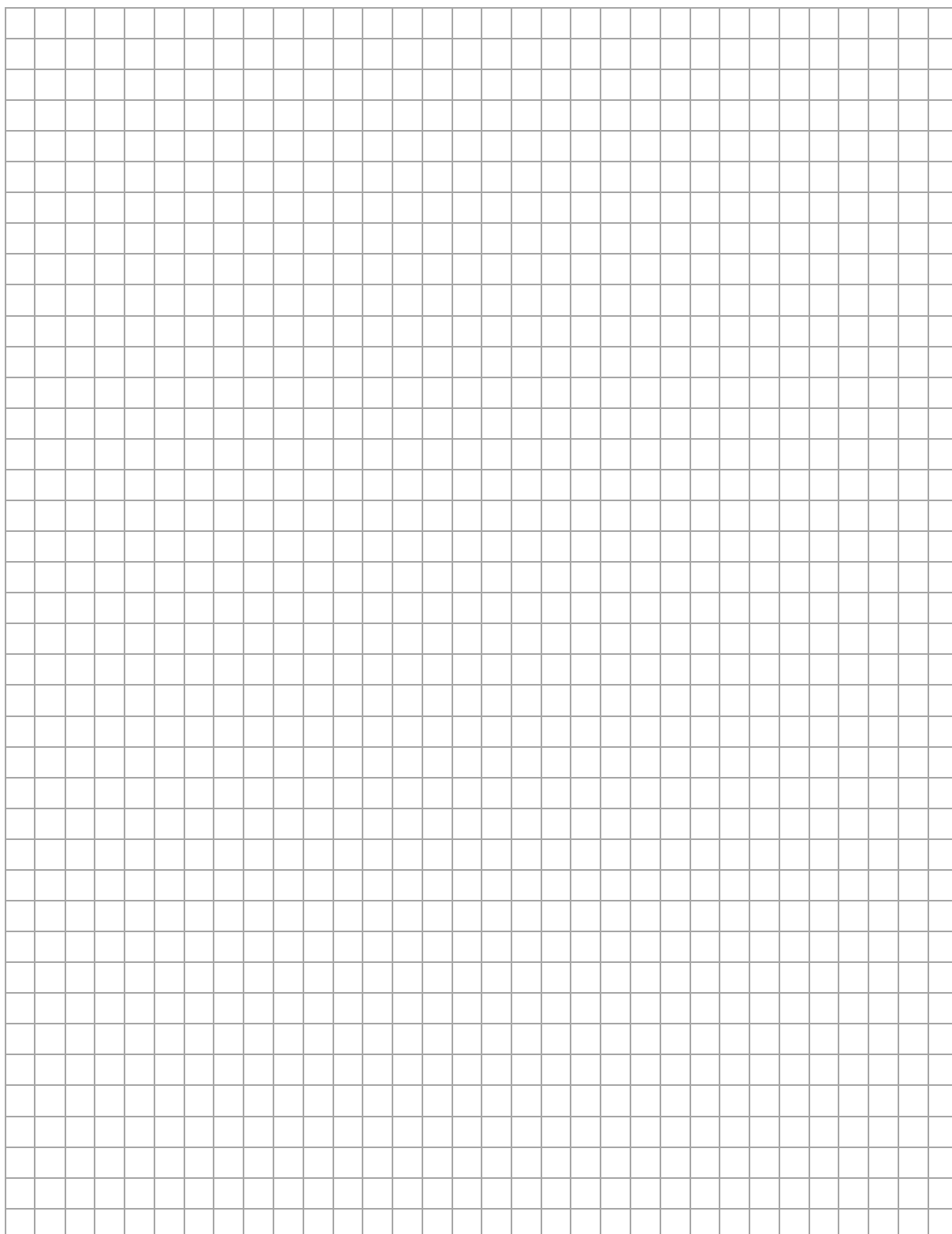
**Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .
Zapisz obliczenia.**



Zadanie 4. (0–3)

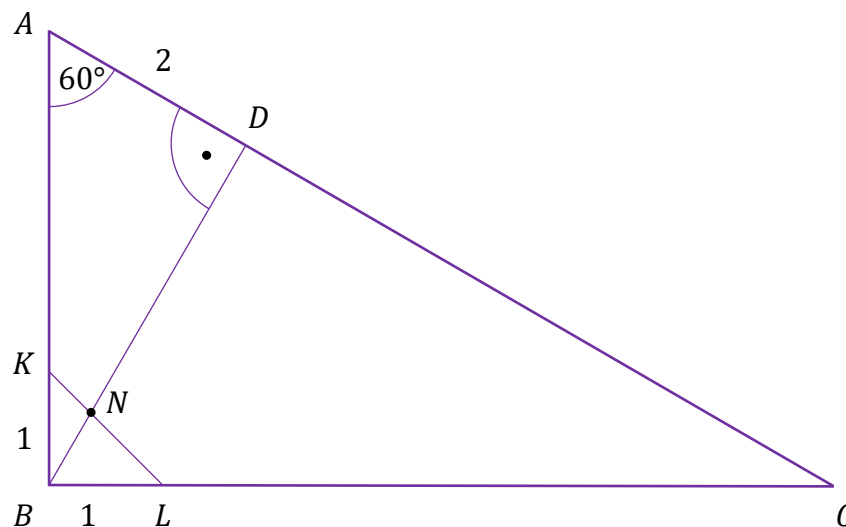
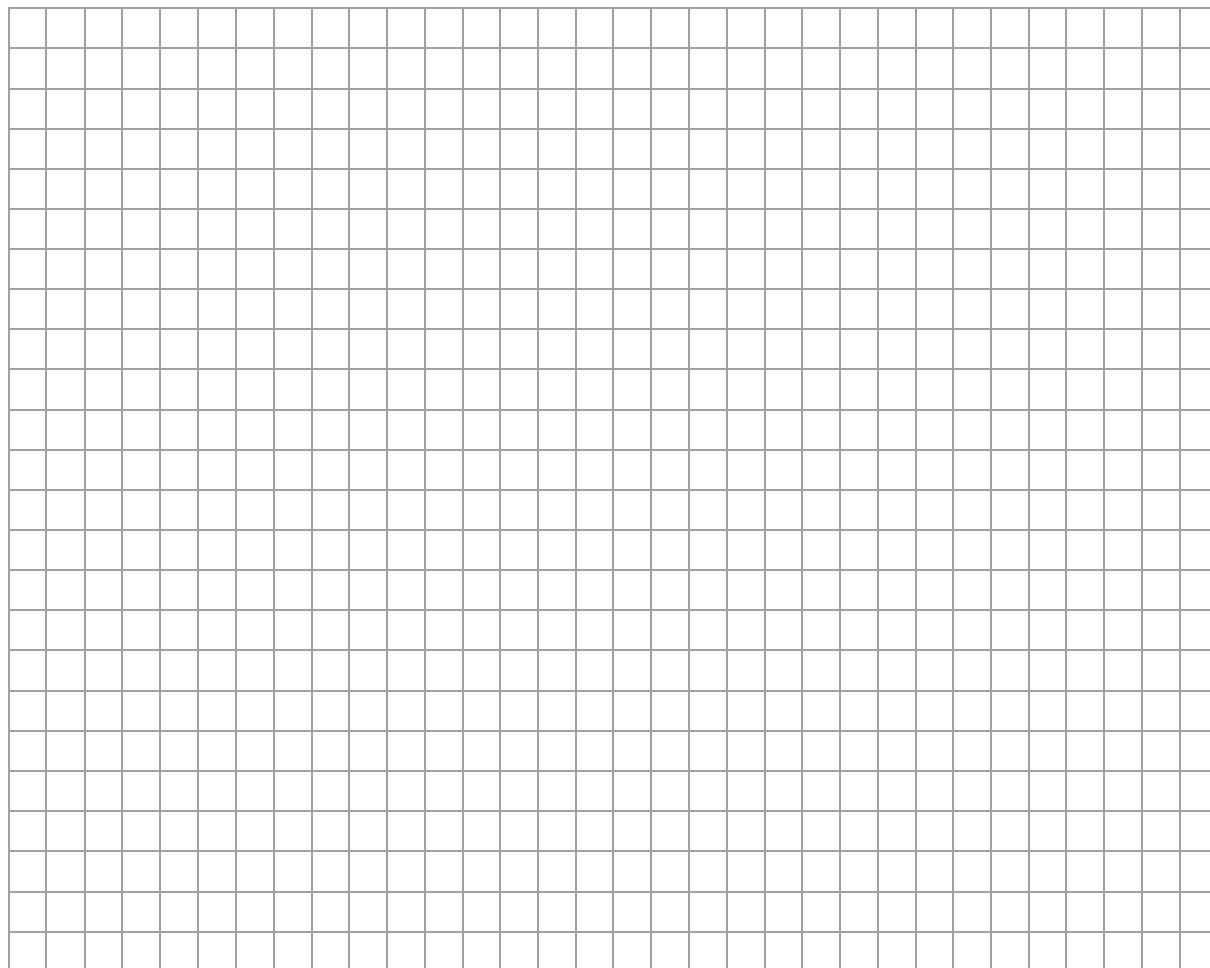
Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$.

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

**4.**0–1–
2–3

Zadanie 5. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle CAB| = 60^\circ$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N , a ponadto $|AD| = 2$.

**5.**0–1–
2–3**Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.**

0-1-
2-3

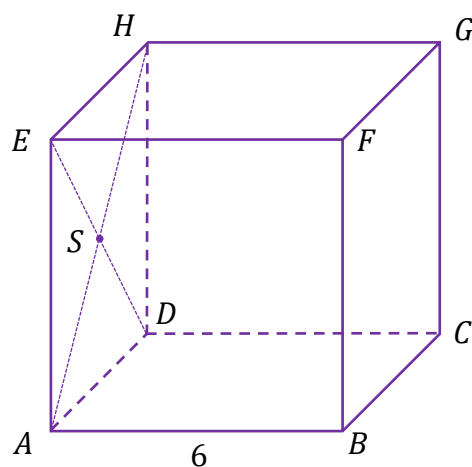
Rozwiąż równanie

Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

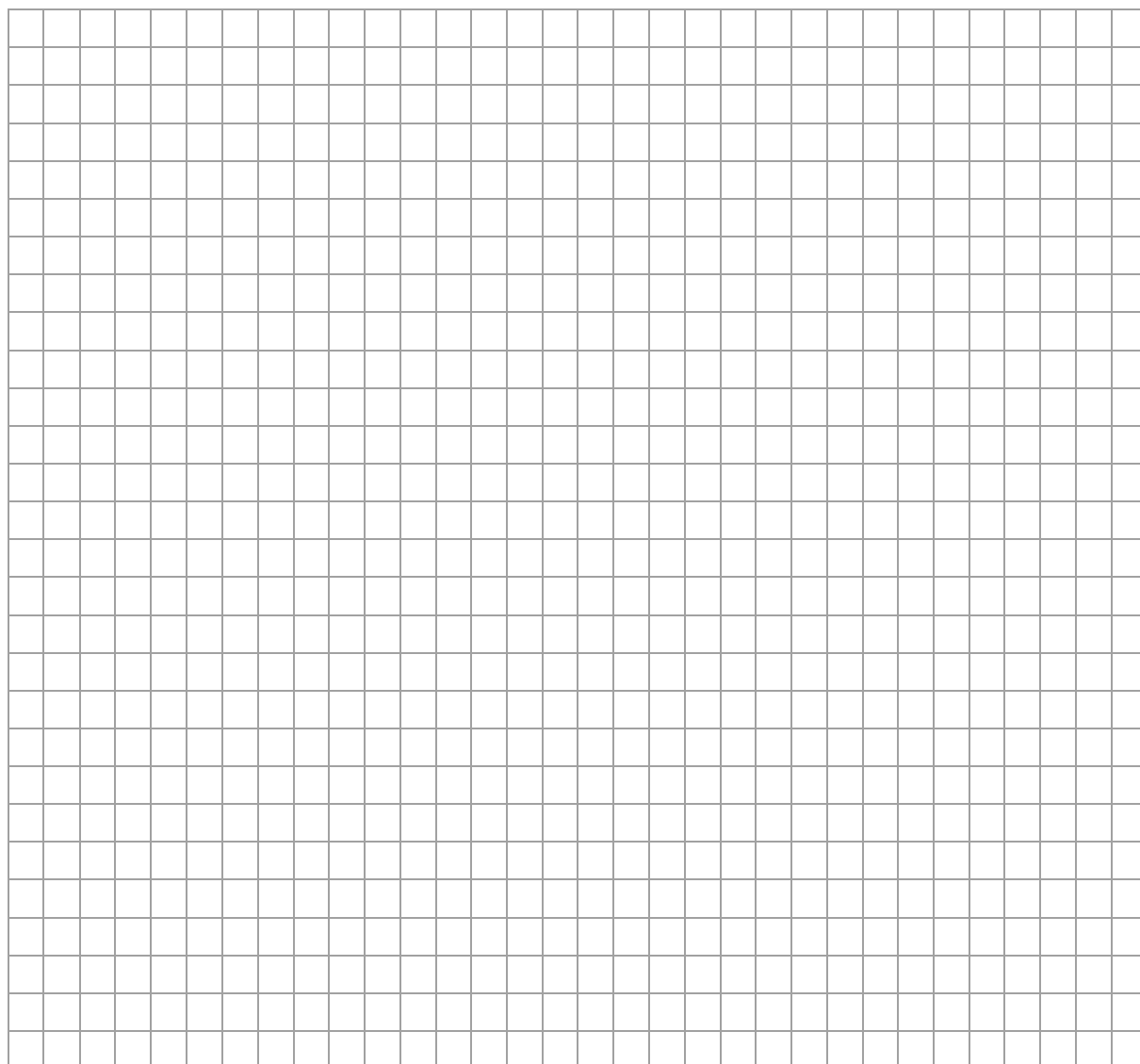
Zadanie 7. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



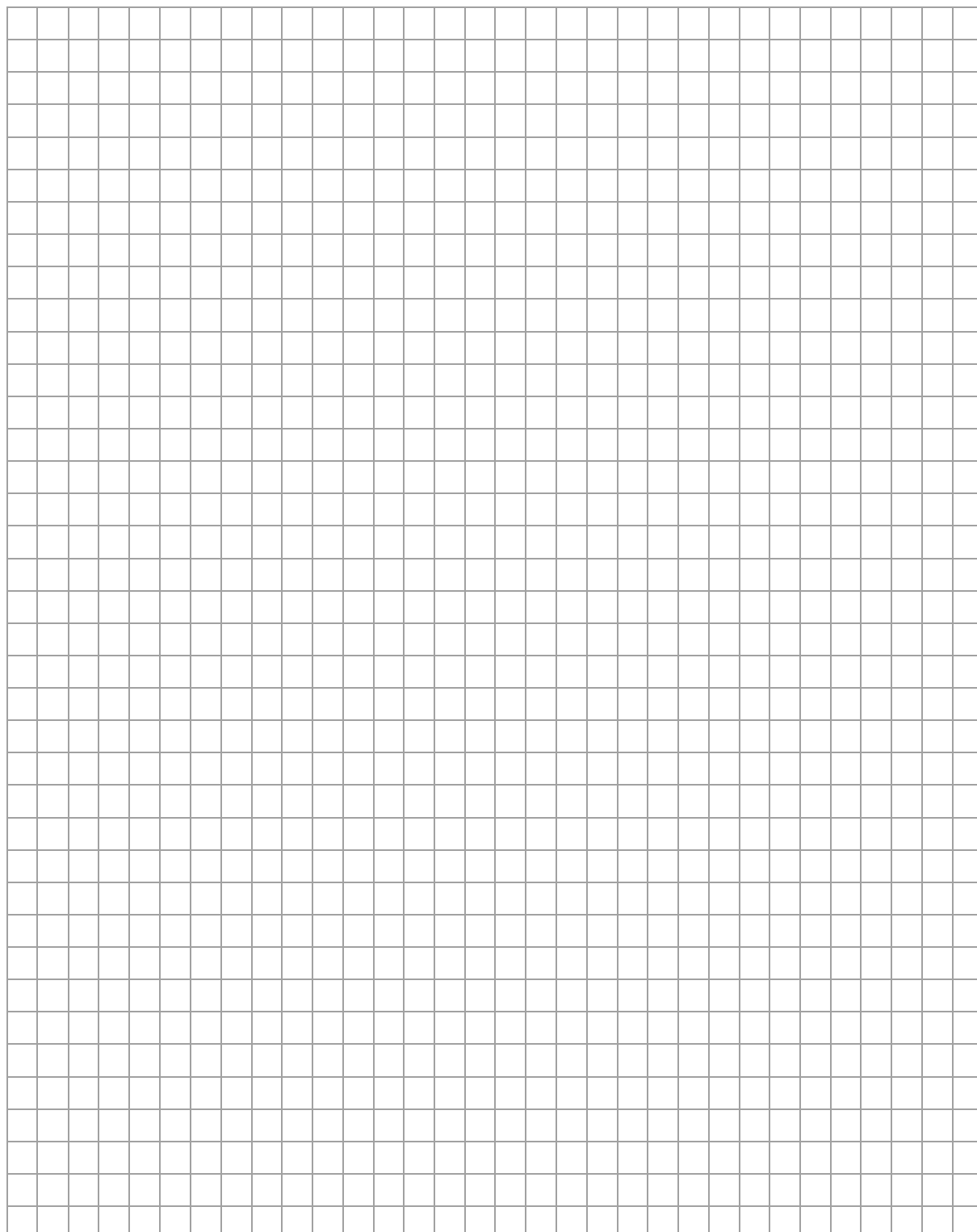
Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

7.

0–1–
2–3–4

Zadanie 8. (0–4)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze 60° , natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$.

8.0–1–
2–3–4**Oblicz obwód czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.**

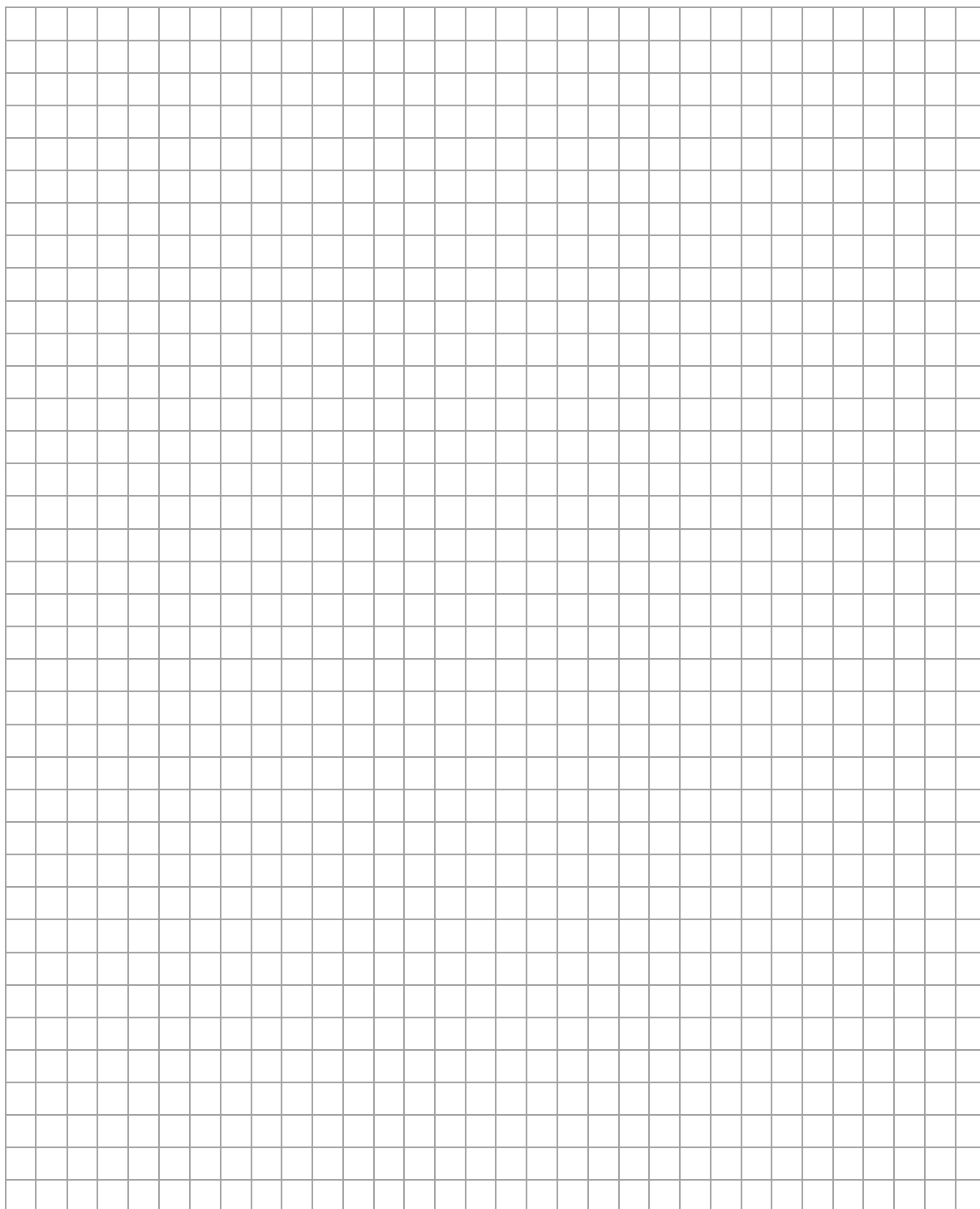
9.

0-1-
2-3-4**Zadanie 9. (0-4)****Rozwiąż nierówność**

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla każdej liczby rzeczywistej a .



Zadanie 10. (0–4)

Określamy kwadraty $K_1, K_2, K_3, \dots$ następująco:

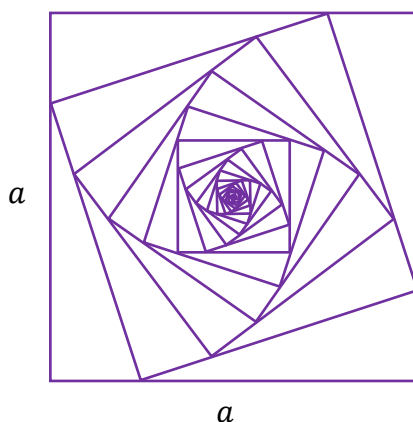
- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

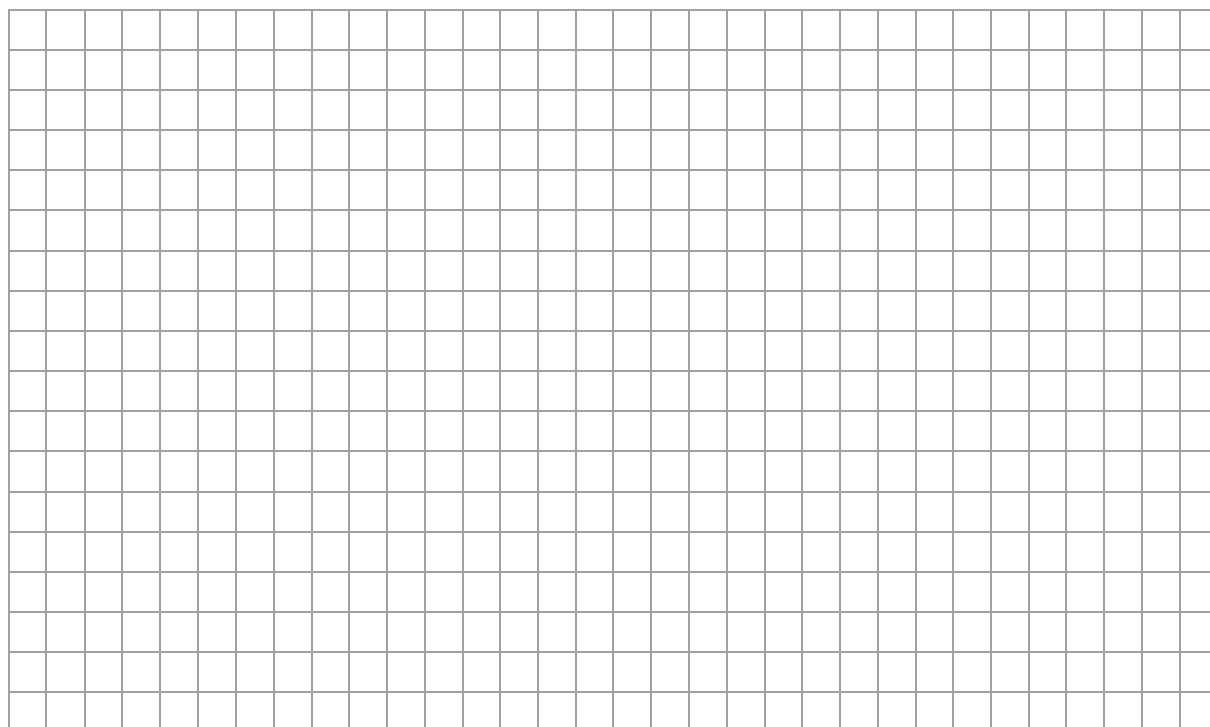
Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



10.

0–1–
2–3–4

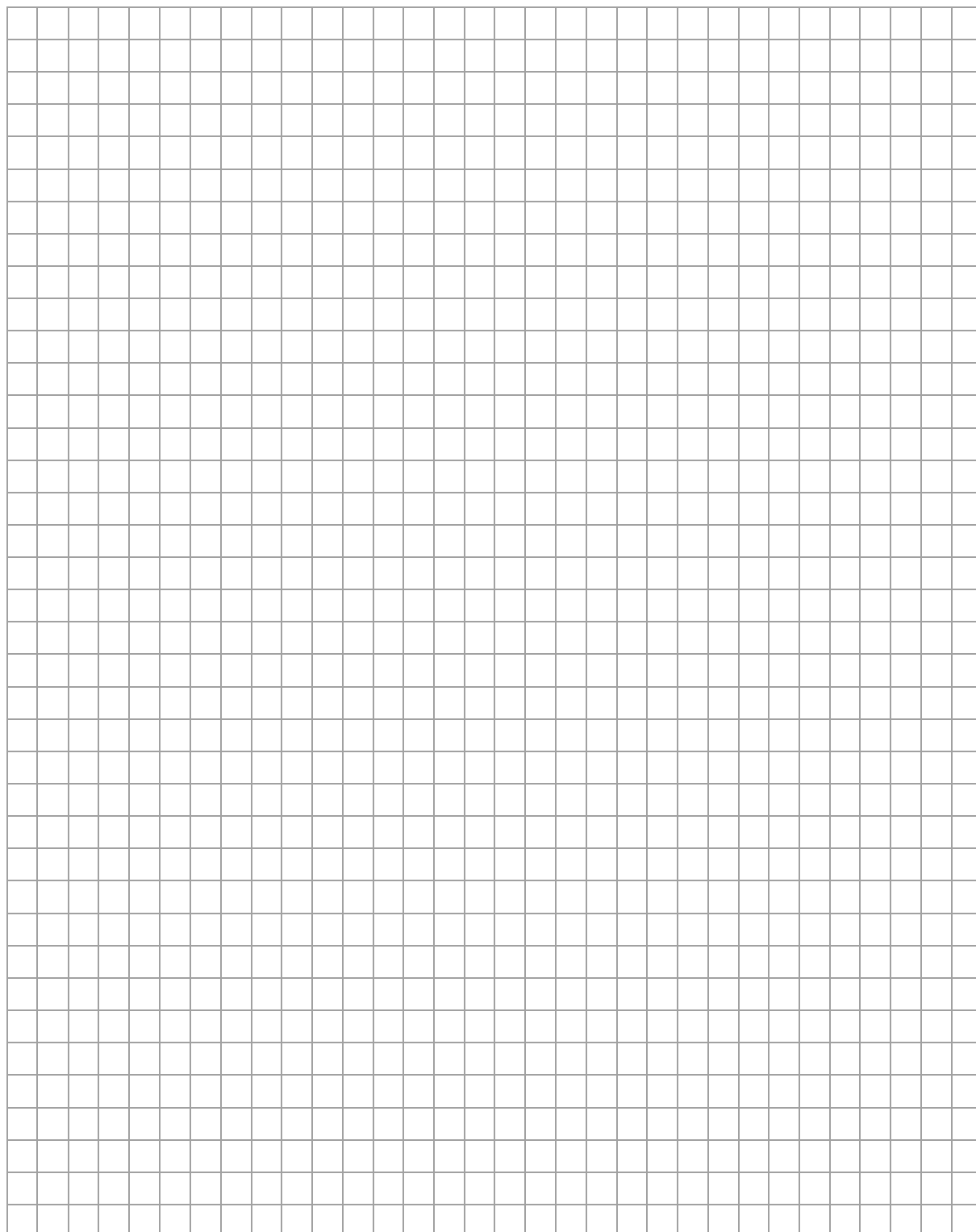
Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.



11.

0-1-
2-3-
4-5**Zadanie 11. (0-5)****Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie**

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

**ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$.
Zapisz obliczenia.**

Zadanie 12.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$ dla każdej liczby dodatniej x .

12.1.

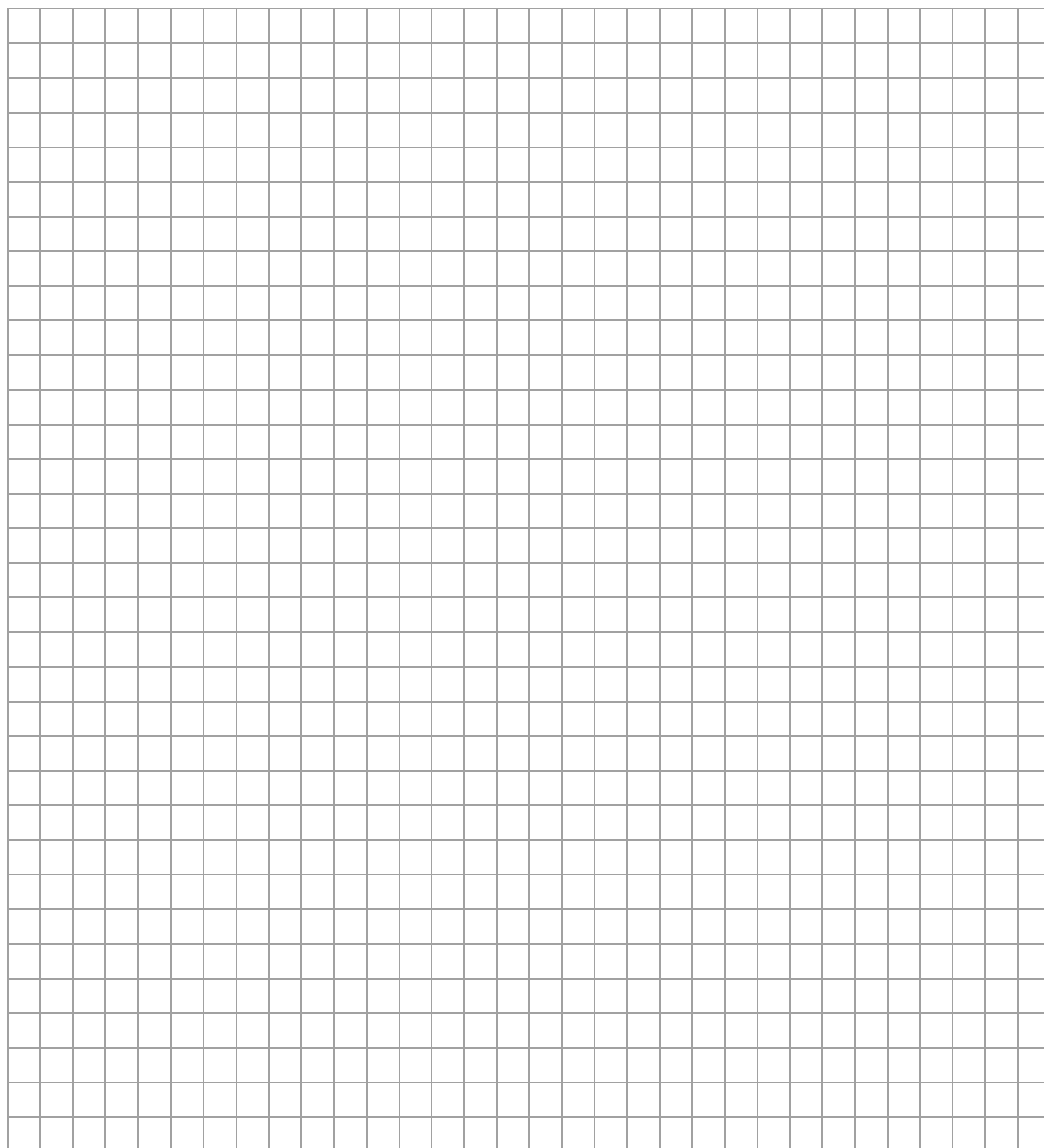
0–1–2

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

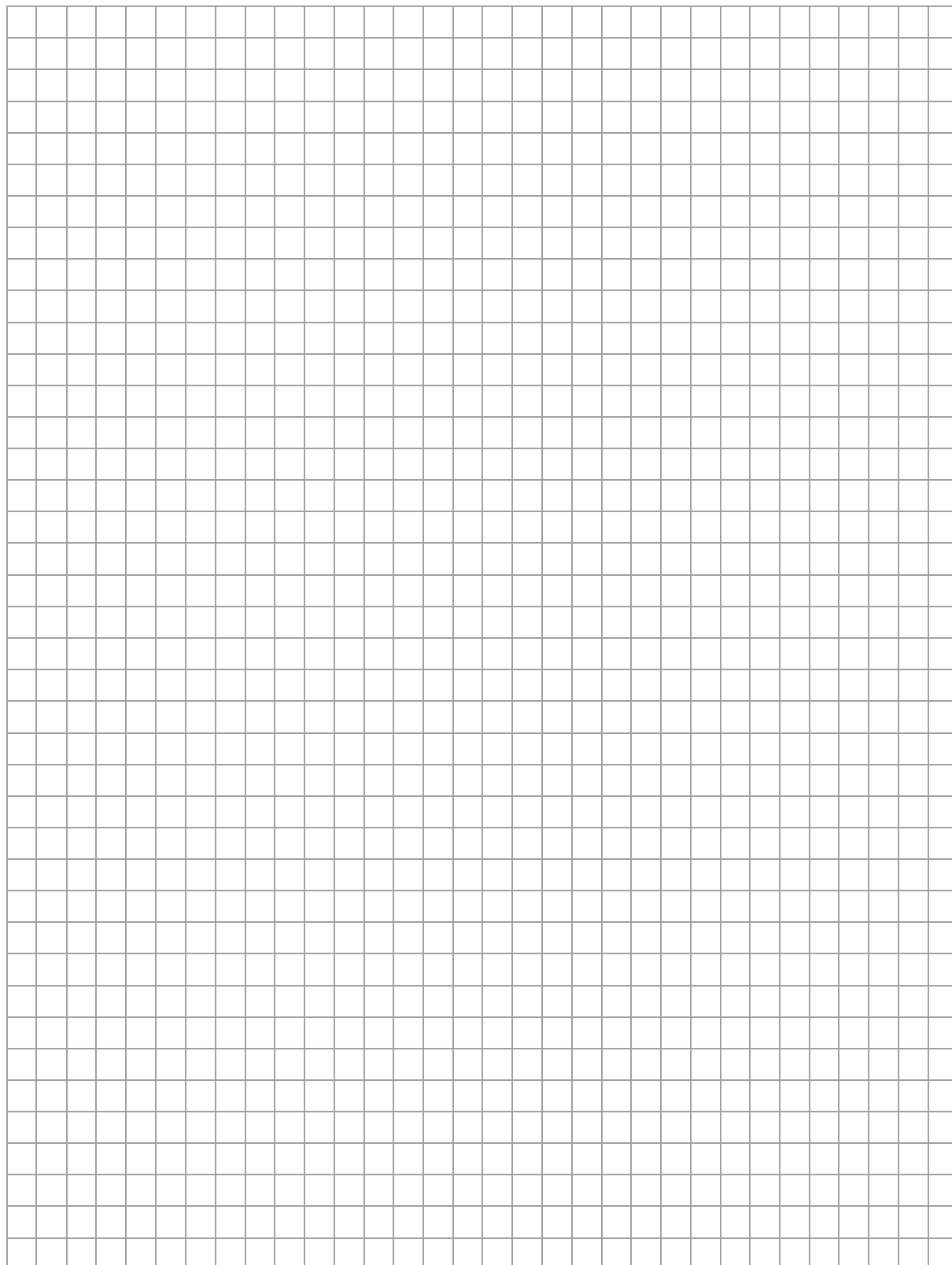
można równoważnie przekształcić do postaci $x^4 + x^2 - 6x$.



Zadanie 12.2. (0–4)

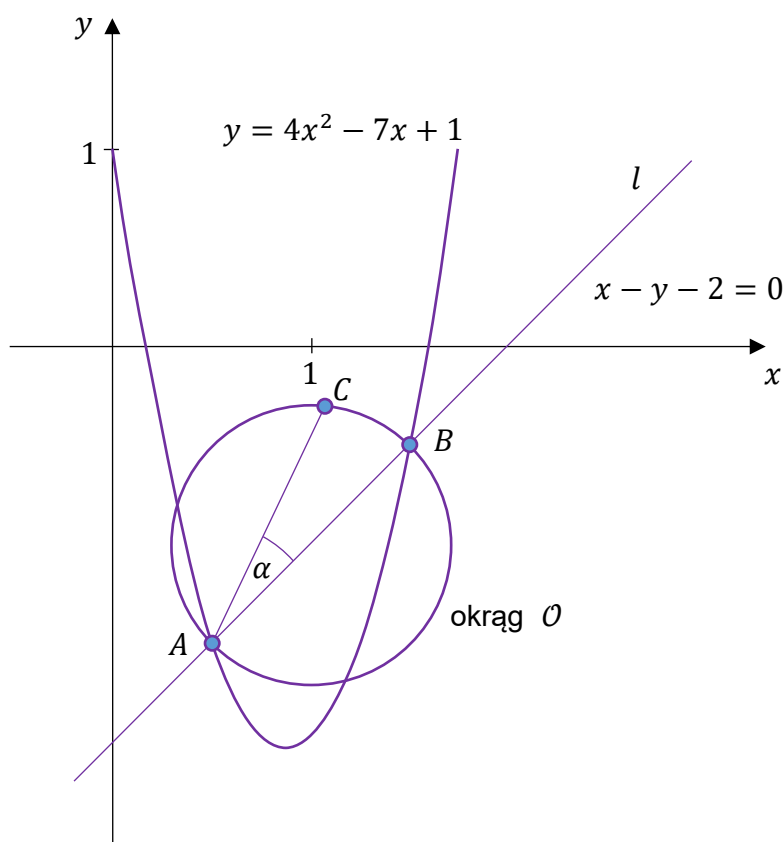
Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby dodatniej x .
Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że wzór funkcji f można przedstawić w postaci $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$.

12.2.0–1–
2–3–4

Zadanie 13. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B . Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Punkt C leży na okręgu $\mathcal{O}$ nad prostą l , a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).

**13.**0–1–
2–3–
4–5–6**Oblicz współrzędne punktu C . Zapisz obliczenia.**