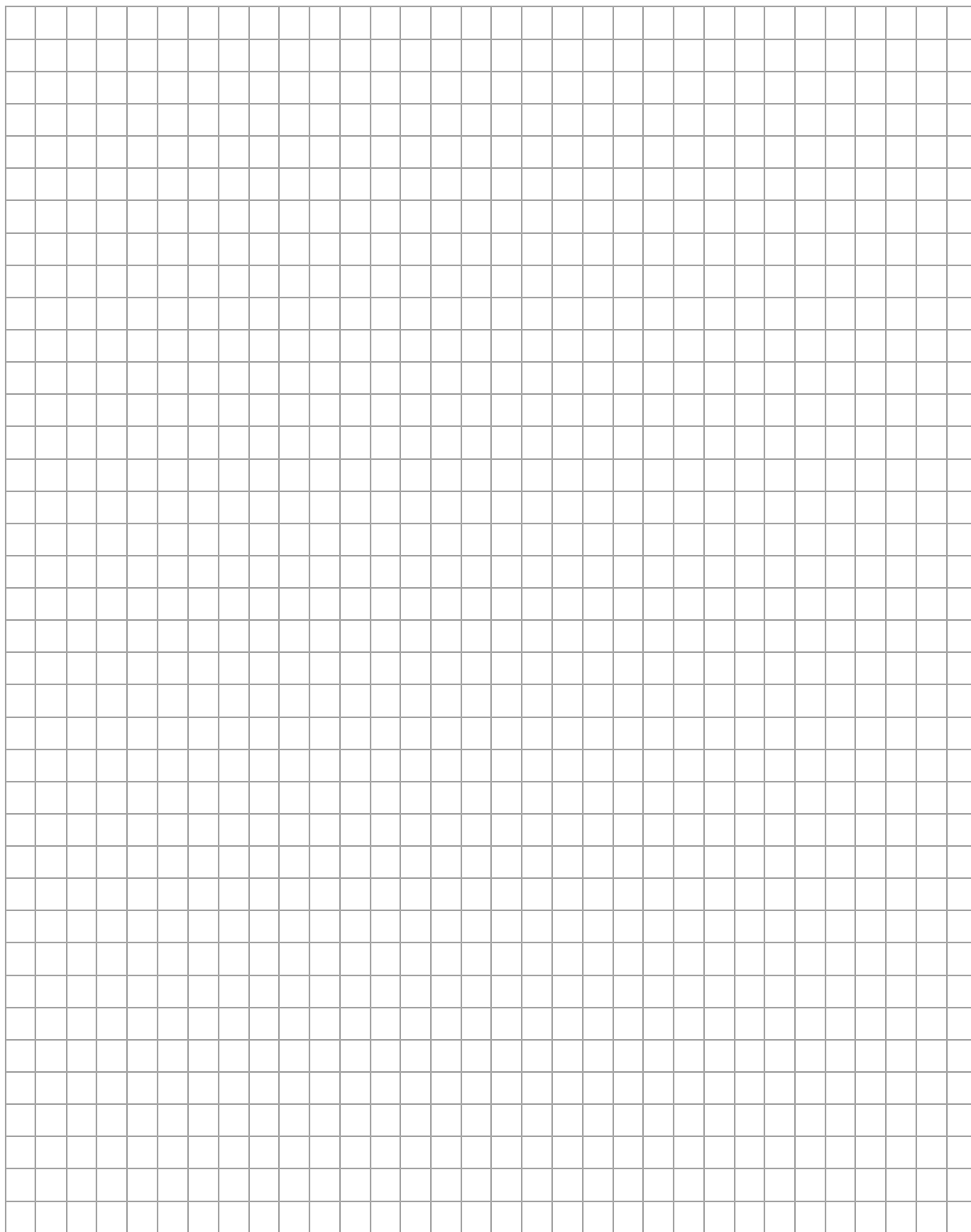


Zadanie 1. (0–2)

Dane są liczby

$$a = 4^{\log_2 45} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023}$$

Oblicz $a - b$.



Zadanie 2. (0–3)

Wśród n osób są Ania i jej dwaj znajomi. Wszystkie te n osób ustawiamy w kolejkę jedna za drugą. Liczba wszystkich takich ustawień jest 12 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień tych n osób w kolejkę, w których Ania i jej dwaj znajomi zajmują trzy kolejne miejsca (w dowolnej kolejności).

Oblicz n . Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 3. (0–3)

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii sieci ciepłowniczej na pewnym osiedlu mieszkaniowym w godzinach porannych pojedynczego dnia jest równe 0,1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie siedmiu dni wystąpią co najwyżej dwa takie dni, w których nastąpi awaria tej sieci na tym osiedlu w godzinach porannych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

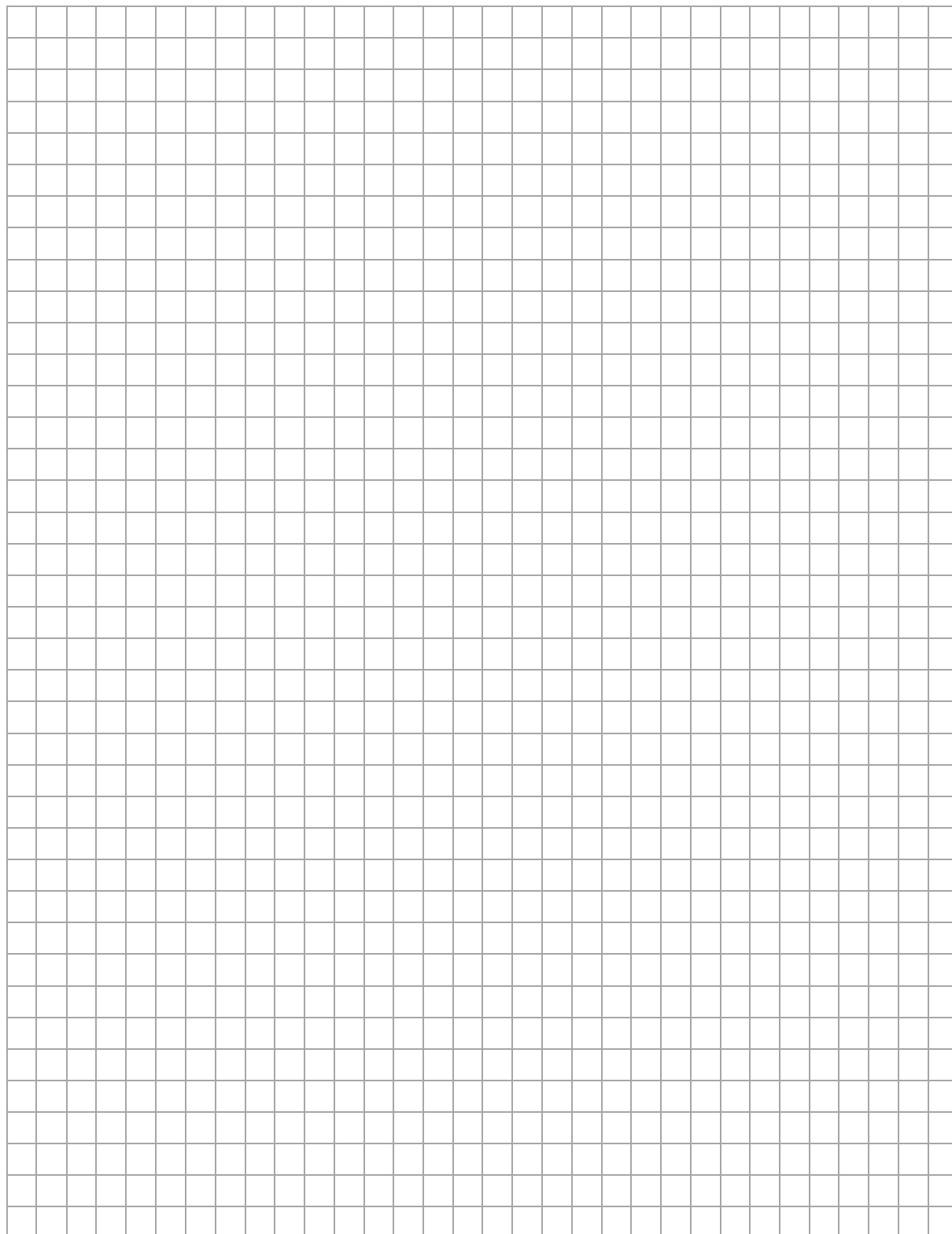
Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Punkt $P = (x_0, 18)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

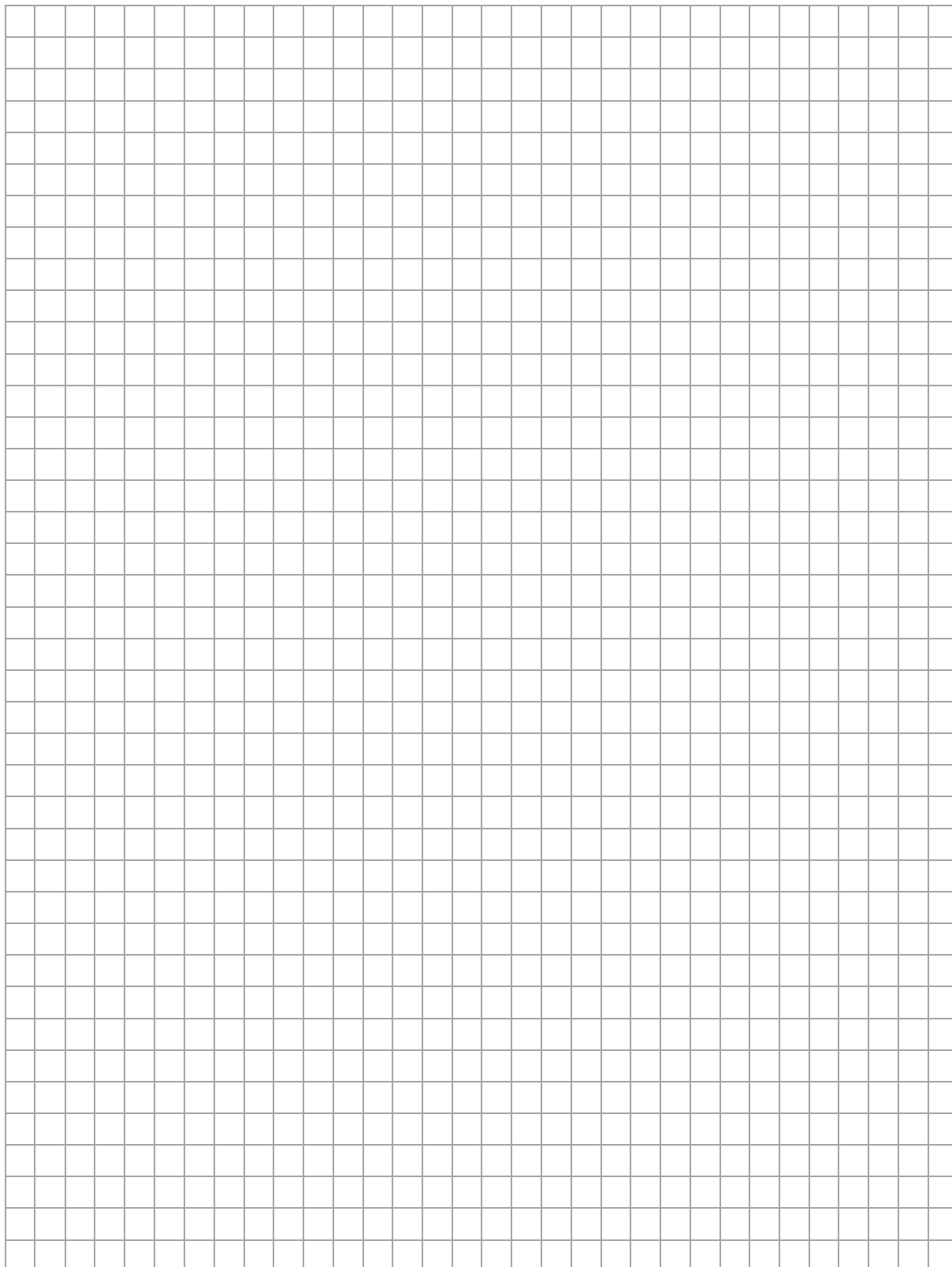
Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0–3)

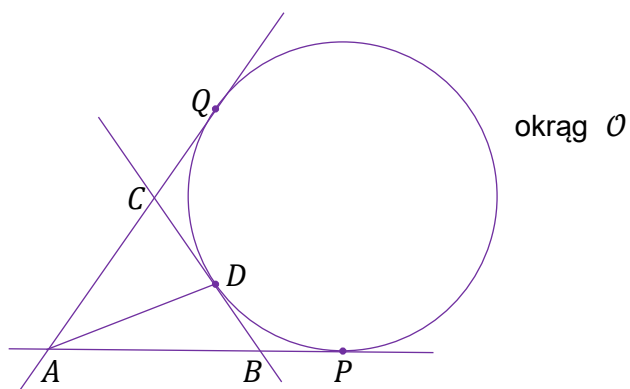
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

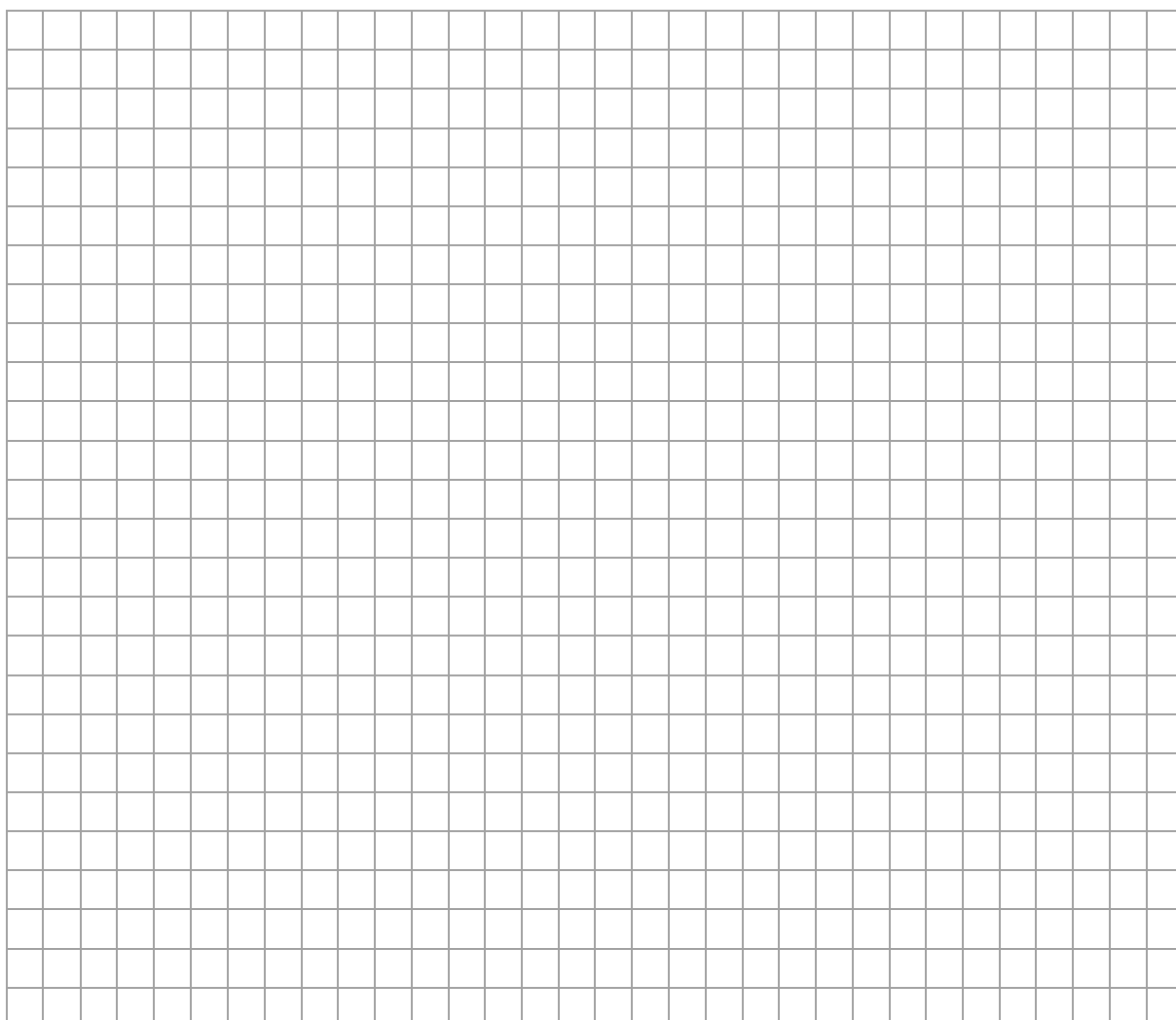


Zadanie 6. (0–3)

Dany jest okrąg $\mathcal{O}$. Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q . Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D , która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 2 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

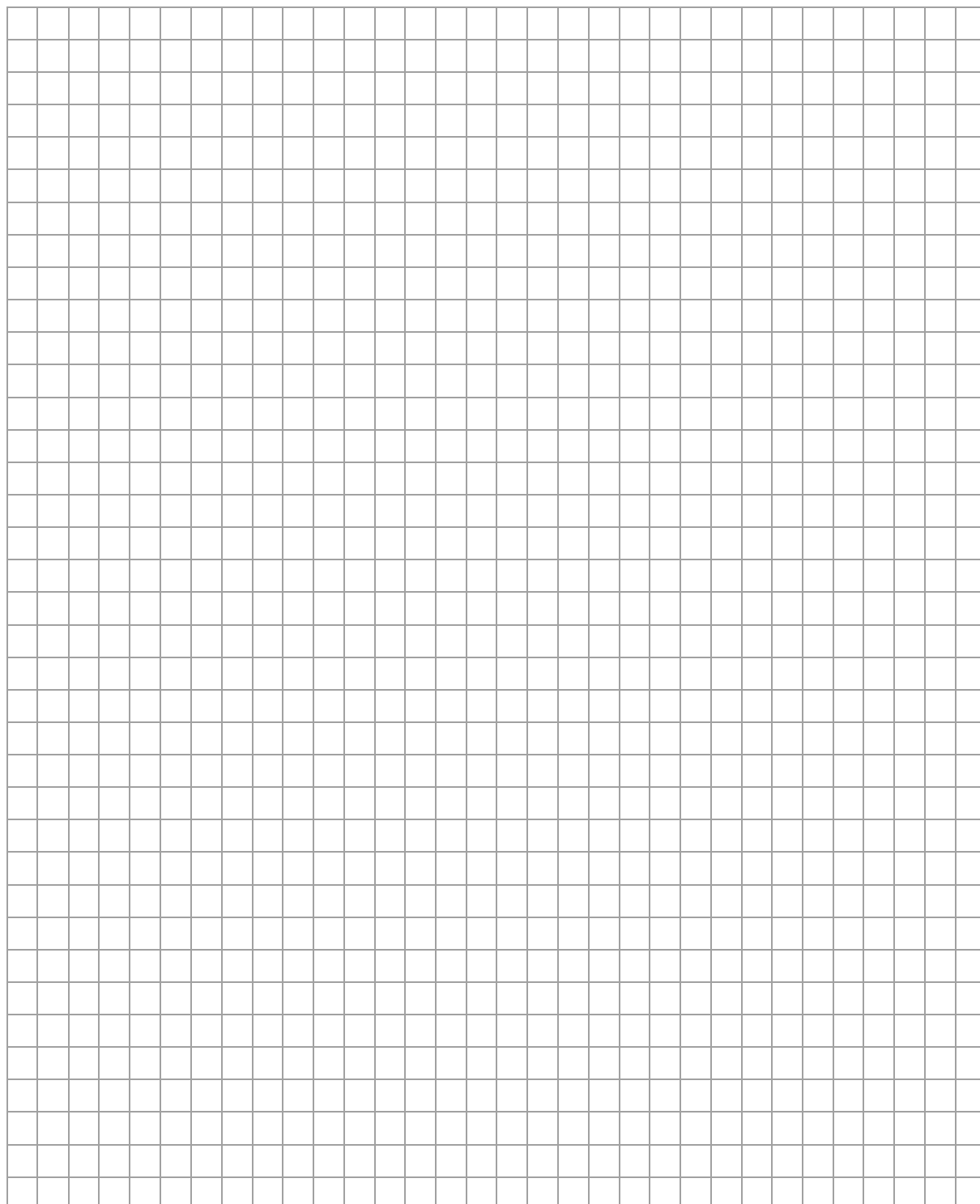


Zadanie 7. (0–4)

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \dots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$. Zapisz obliczenia.

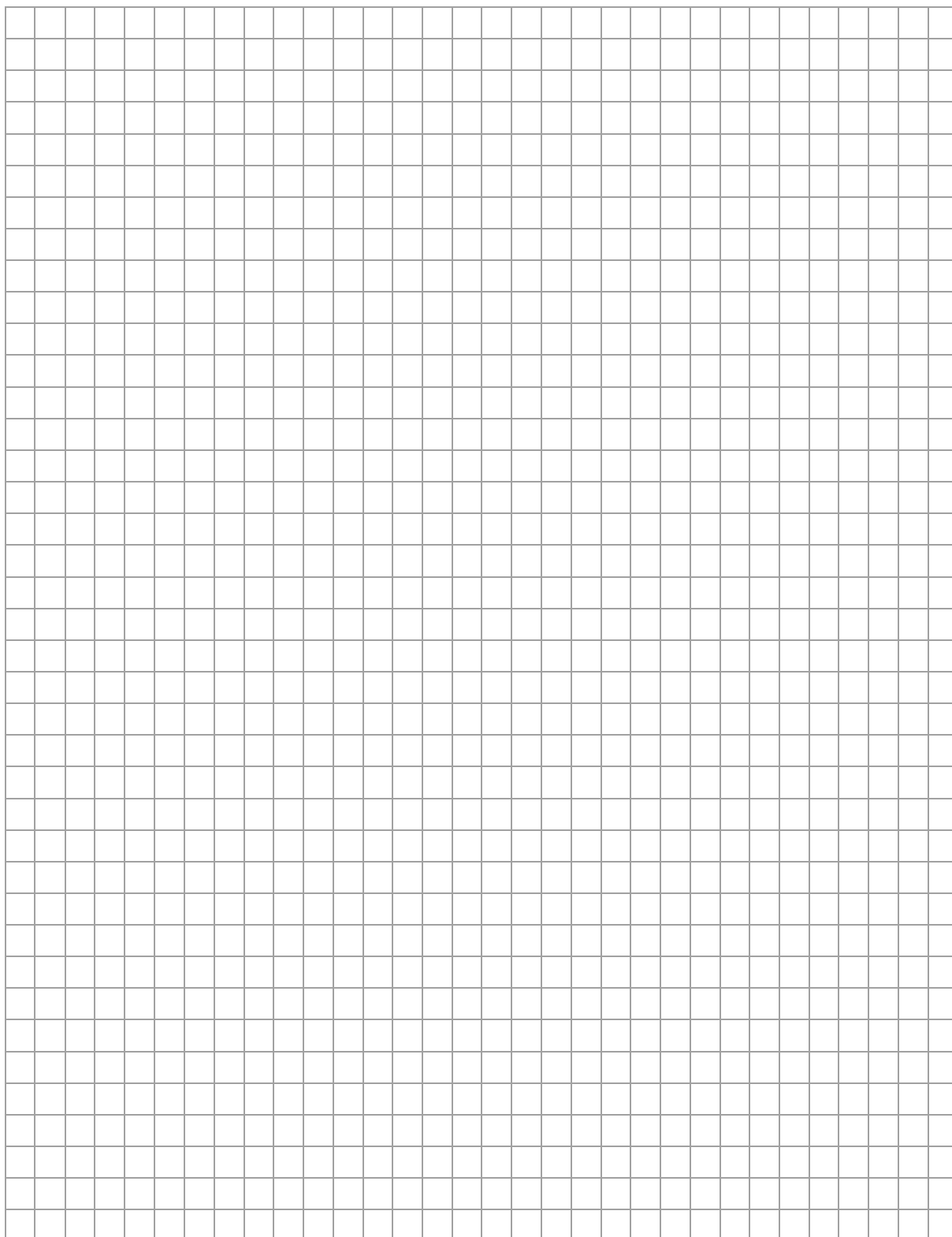


Zadanie 8. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

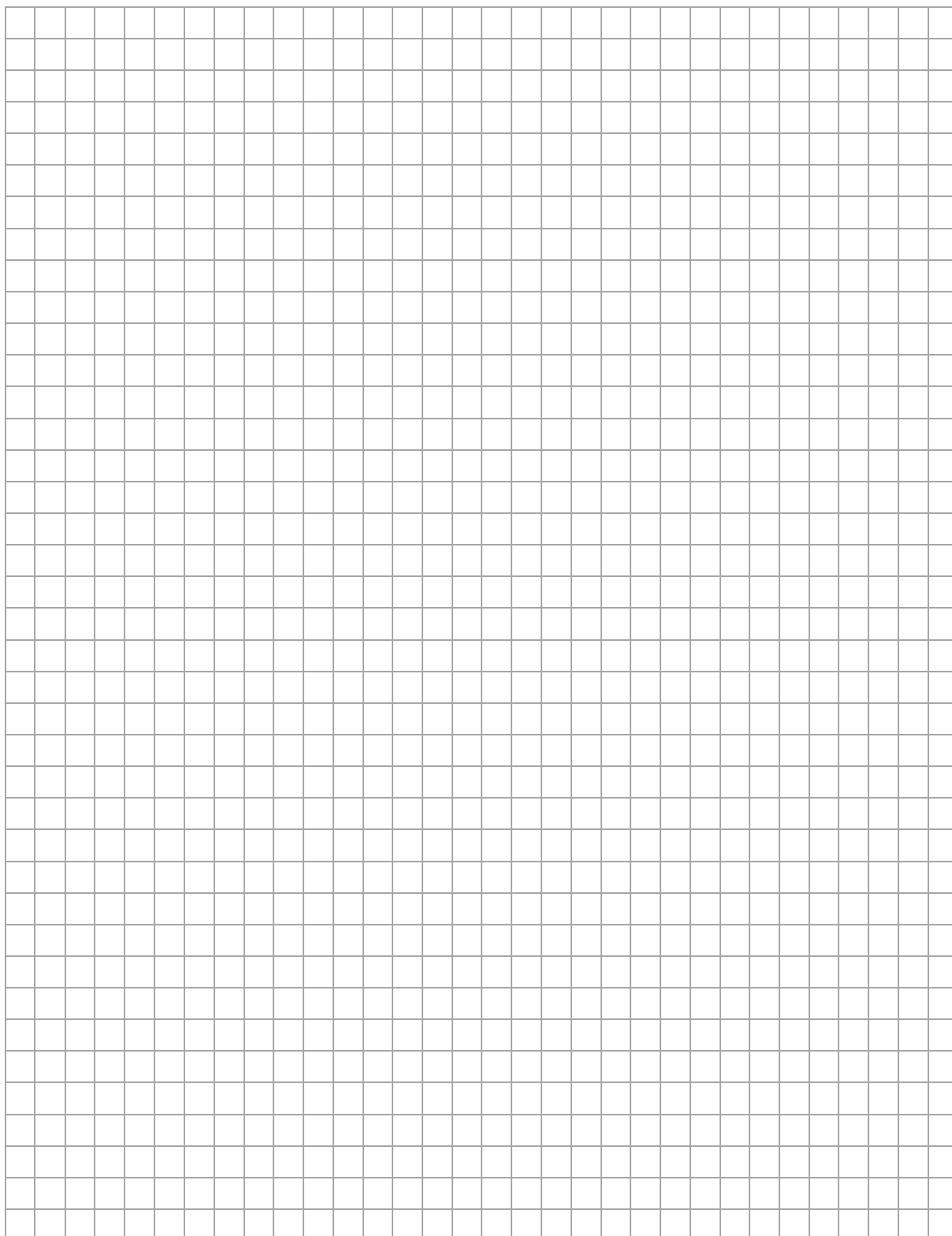
w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 9. (0–4)

W okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ wpisano trójkąt ABC . Bok AB tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $4x - 3y + 2 = 0$. Wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB tak, że $|AD| = 4 \cdot |DB|$.

Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$mx^2 - (m + 1)x - 2m + 3 = 0$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$$

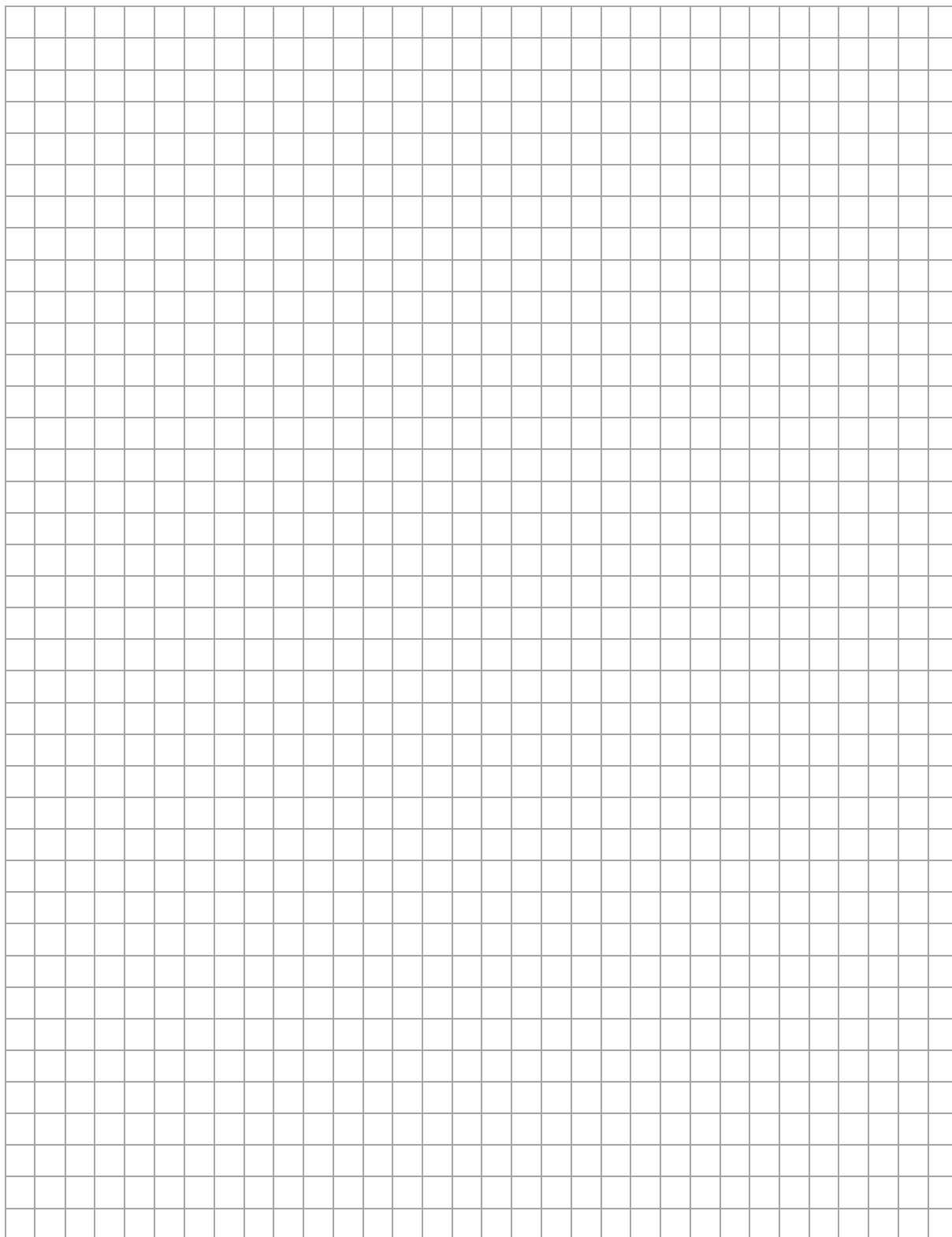
Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 11. (0–5)

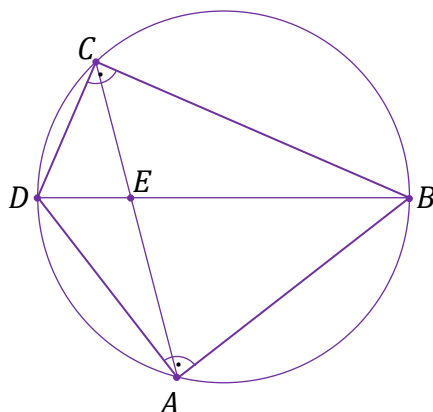
Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Ciąg $(2a, 2b, c + 1)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Ponadto spełniony jest warunek $c - b = 6$.

Oblicz a , b oraz c . Zapisz obliczenia.

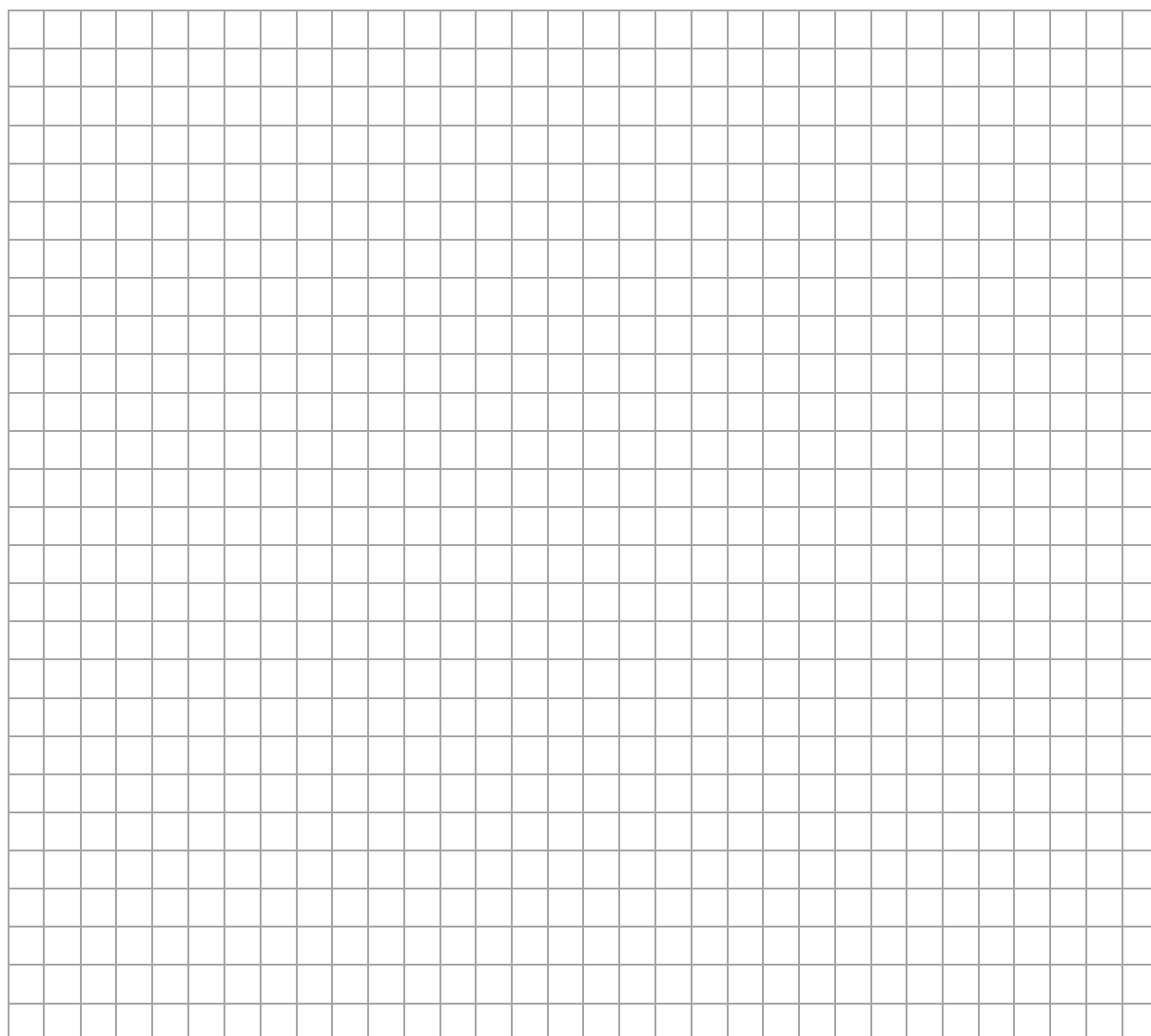


Zadanie 12. (0–5)

Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Kąty BAD i BCD są proste (zobacz rysunek). Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie E tak, że $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$.

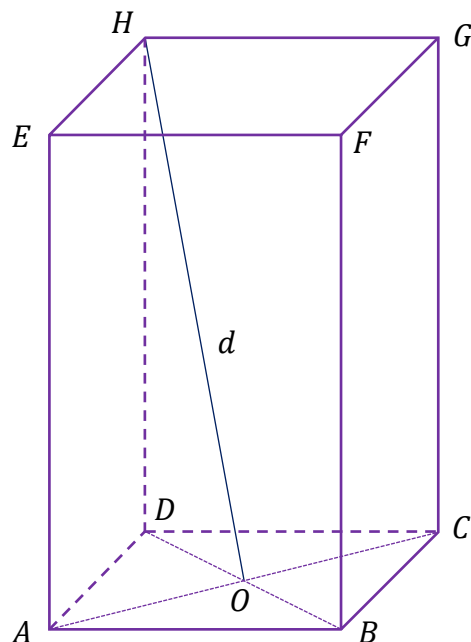


Oblicz długości boków czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 13. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne $ABCDEFGH$, w których odcinek łączący punkt O przecięcia przekątnych AC i BD podstawy $ABCD$ z dowolnym wierzchołkiem podstawy $EFGH$ ma długość d (zobacz rysunek).



- a) Wyznacz zależność objętości V graniastosłupa od jego wysokości h i podaj dziedzinę funkcji $V(h)$.
- b) Wyznacz wysokość tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa.

Zapisz obliczenia.

