

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\log_3 \sqrt{27} - \log_{27} \sqrt{3}$ jest równa

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{11}{12}$ D. 3

Zadanie 2. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$.

Wartość pochodnej tej funkcji dla argumentu $x = \frac{1}{2}$ jest równa

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{54}{8}$

Zadanie 3. (0–1)

Jeżeli $\cos \beta = -\frac{1}{3}$ i $\beta \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, to wartość wyrażenia $\sin\left(\beta - \frac{1}{3}\pi\right)$ jest równa

- A. $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

Zadanie 4. (0–1)

Dane są dwie urny z kulami. W każdej z urn jest siedem kul. W pierwszej urnie są jedna kula biała i sześć kul czarnych, w drugiej urnie są cztery kule białe i trzy kule czarne.

Rzucamy jeden raz symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku – jedną kulę z drugiej urny.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kulę białą w tym doświadczeniu, jest równe

- A. $\frac{5}{14}$ B. $\frac{9}{14}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

Zadanie 5. (0–2)

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{(7p-1)n^3+5pn-3}{(p+1)n^3+n^2+p}$,
 gdzie p jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Oblicz wartość p , dla której granica ciągu (a_n) jest równa $\frac{4}{3}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

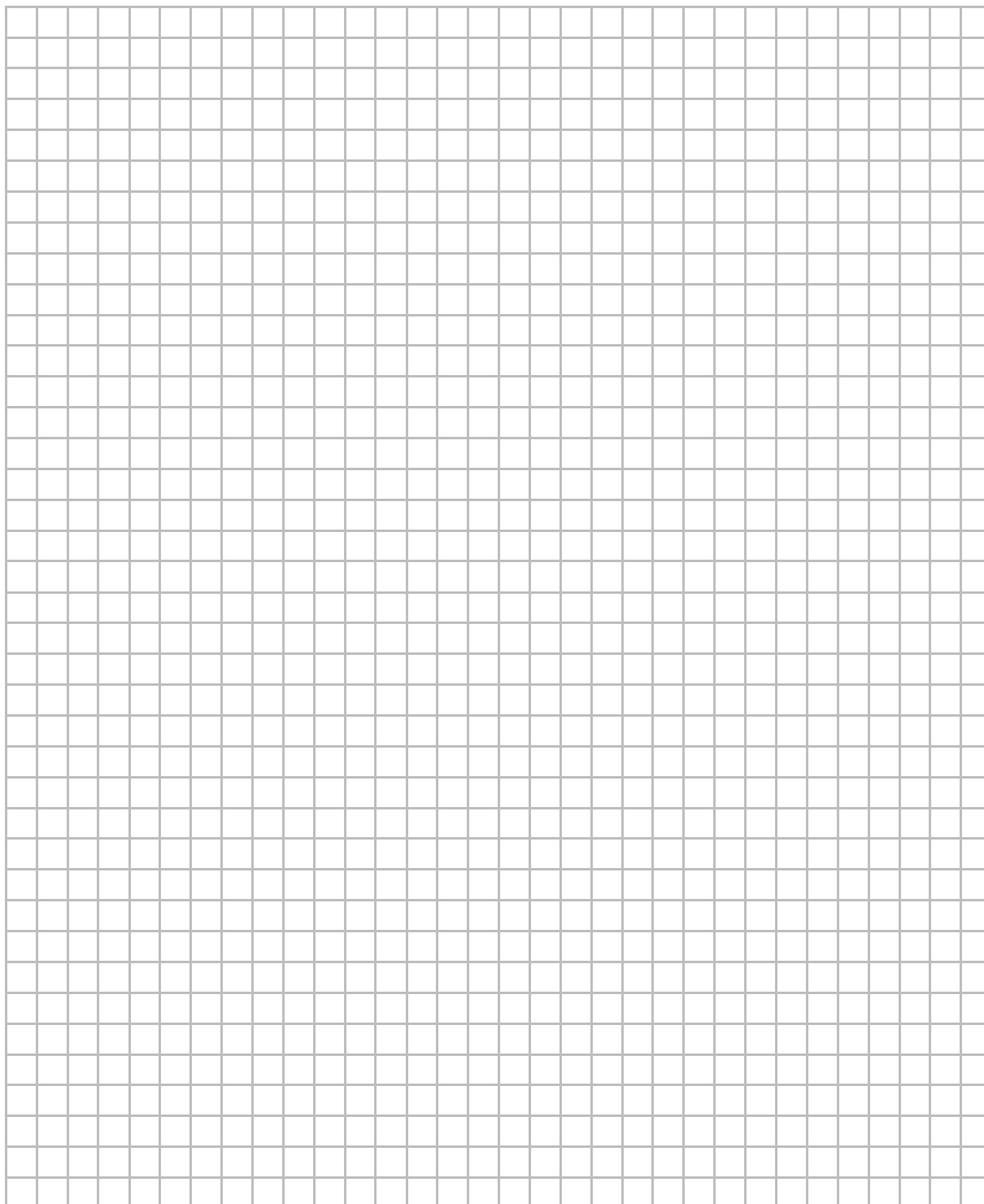
BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$$

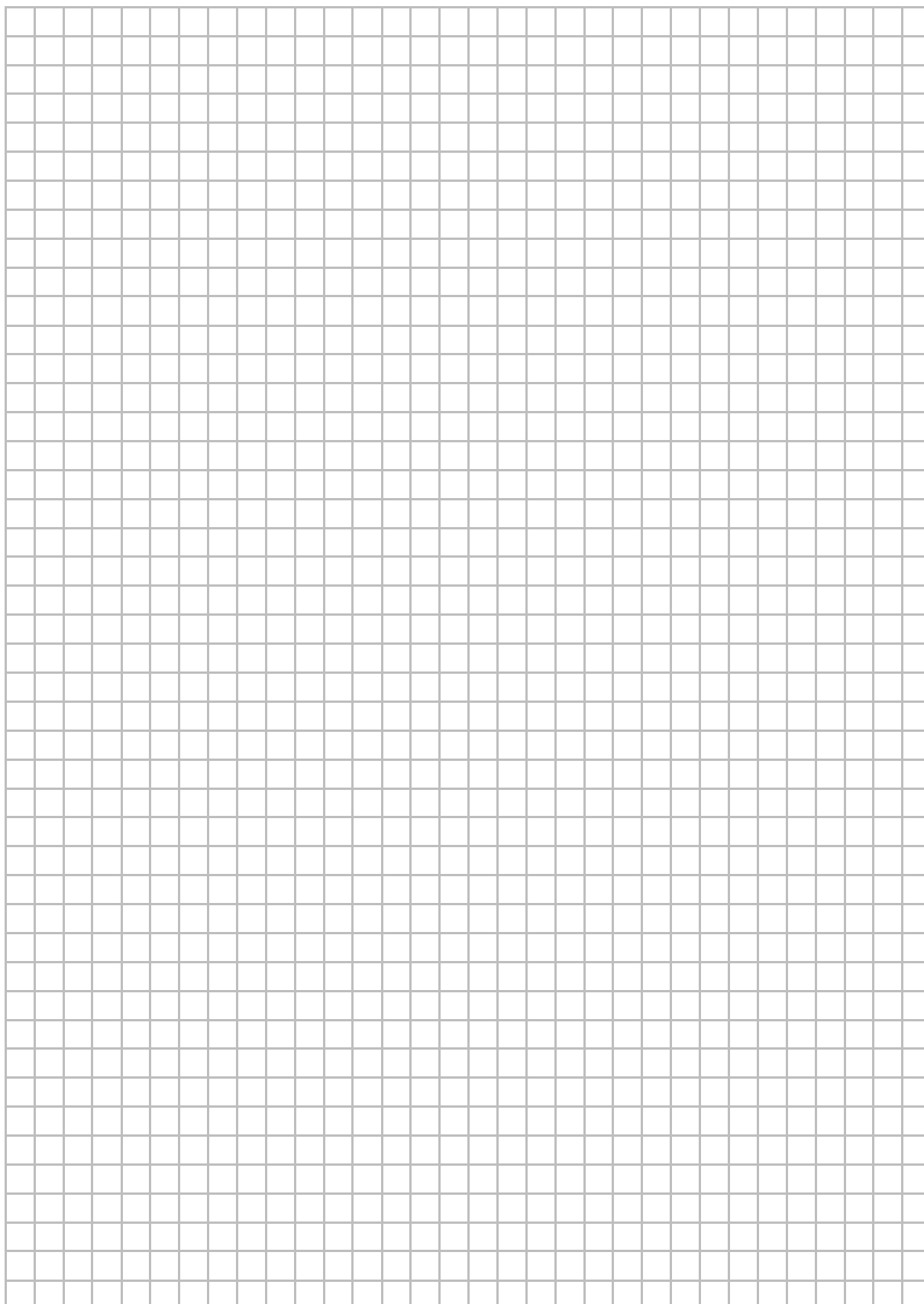


Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

Rozwiąż równanie:

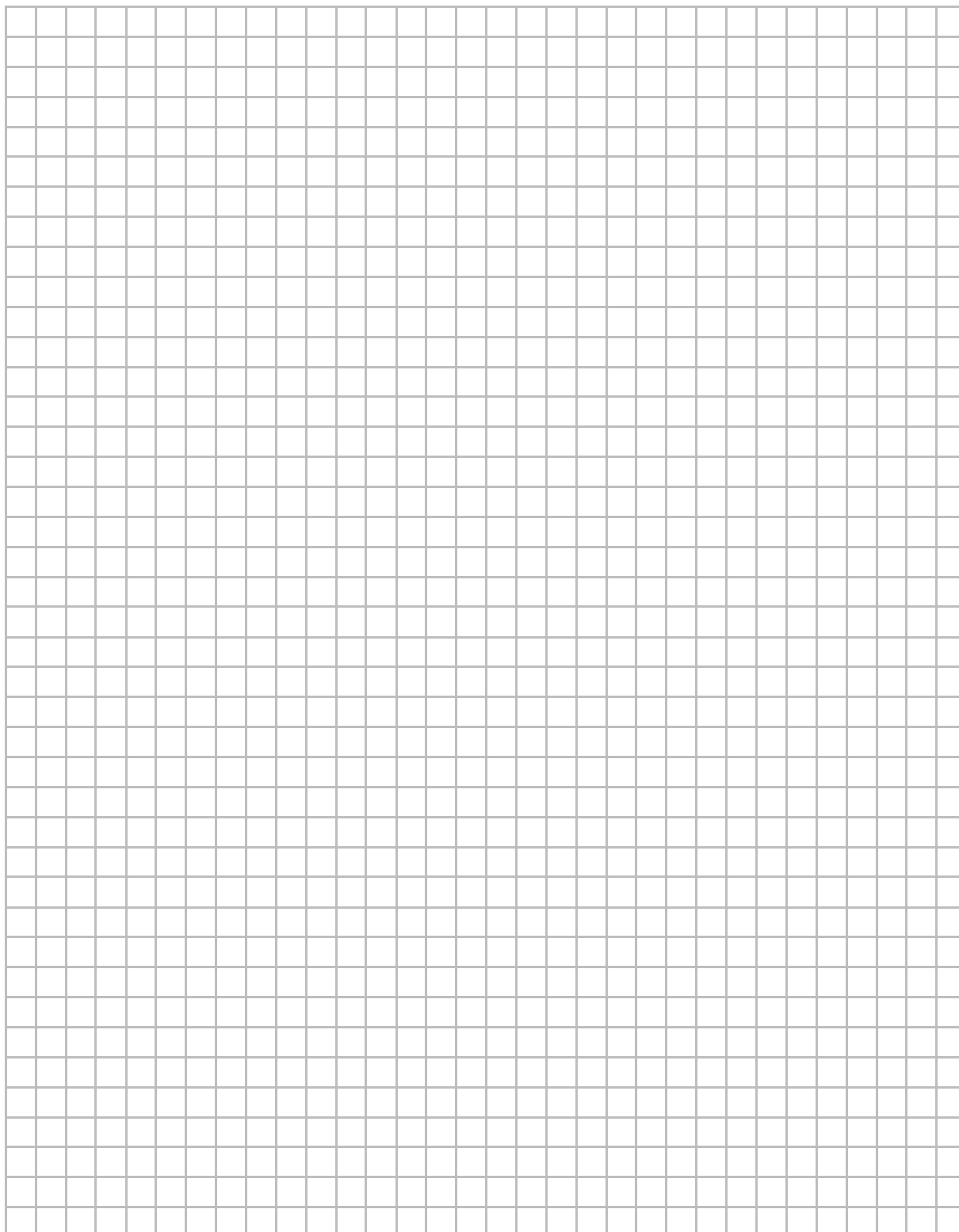
$$|x - 3| = 2x + 11$$



Zadanie 8. (0–3)

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy CD jest o 2 mniejsza od długości podstawy AB . Promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB .

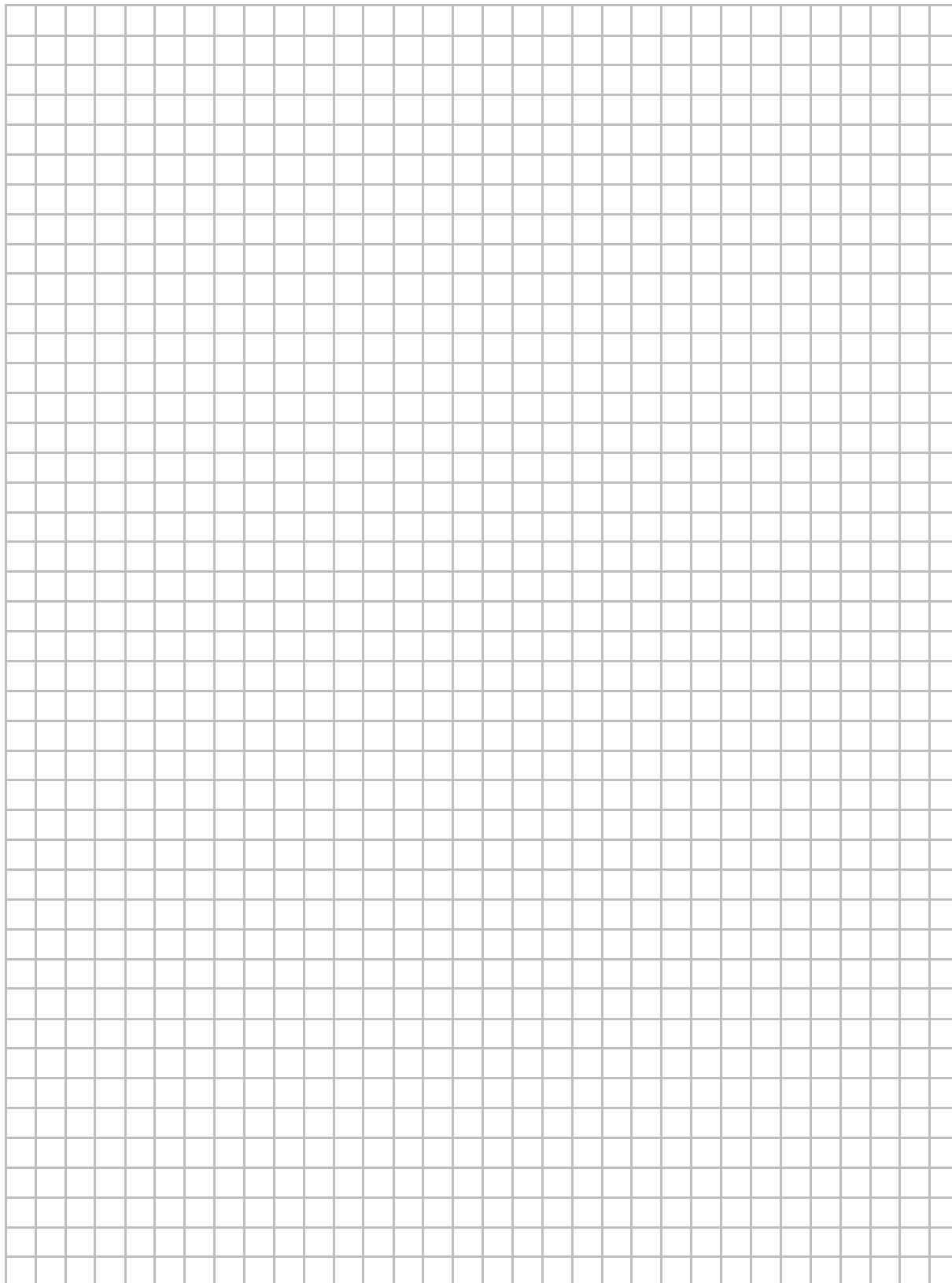
Wykaż, że spełniony jest warunek $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$.



Zadanie 9. (0–4)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$ przez dwumian $x + 2$ jest równa (-30) .

Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

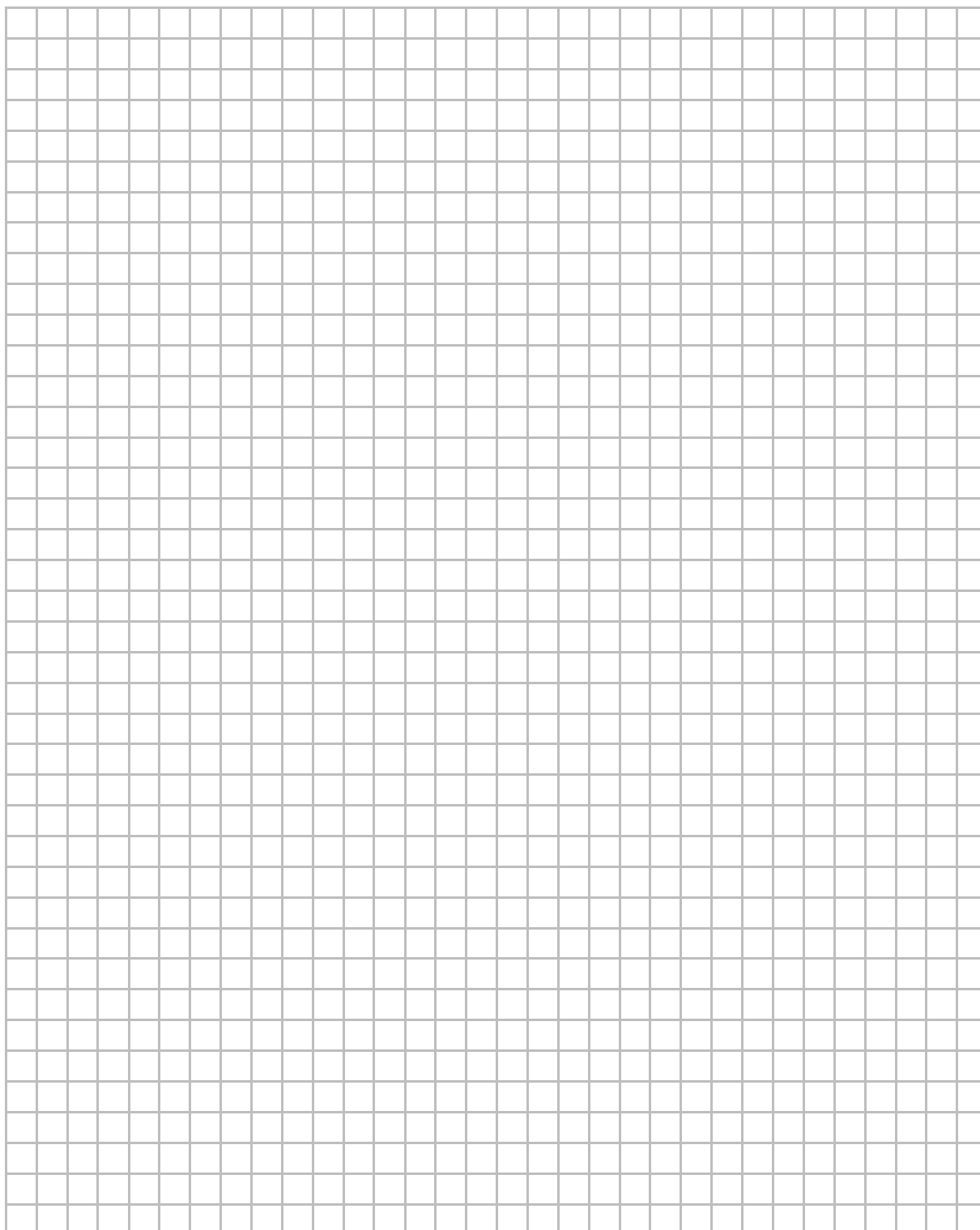


Zadanie 10. (0–4)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$.

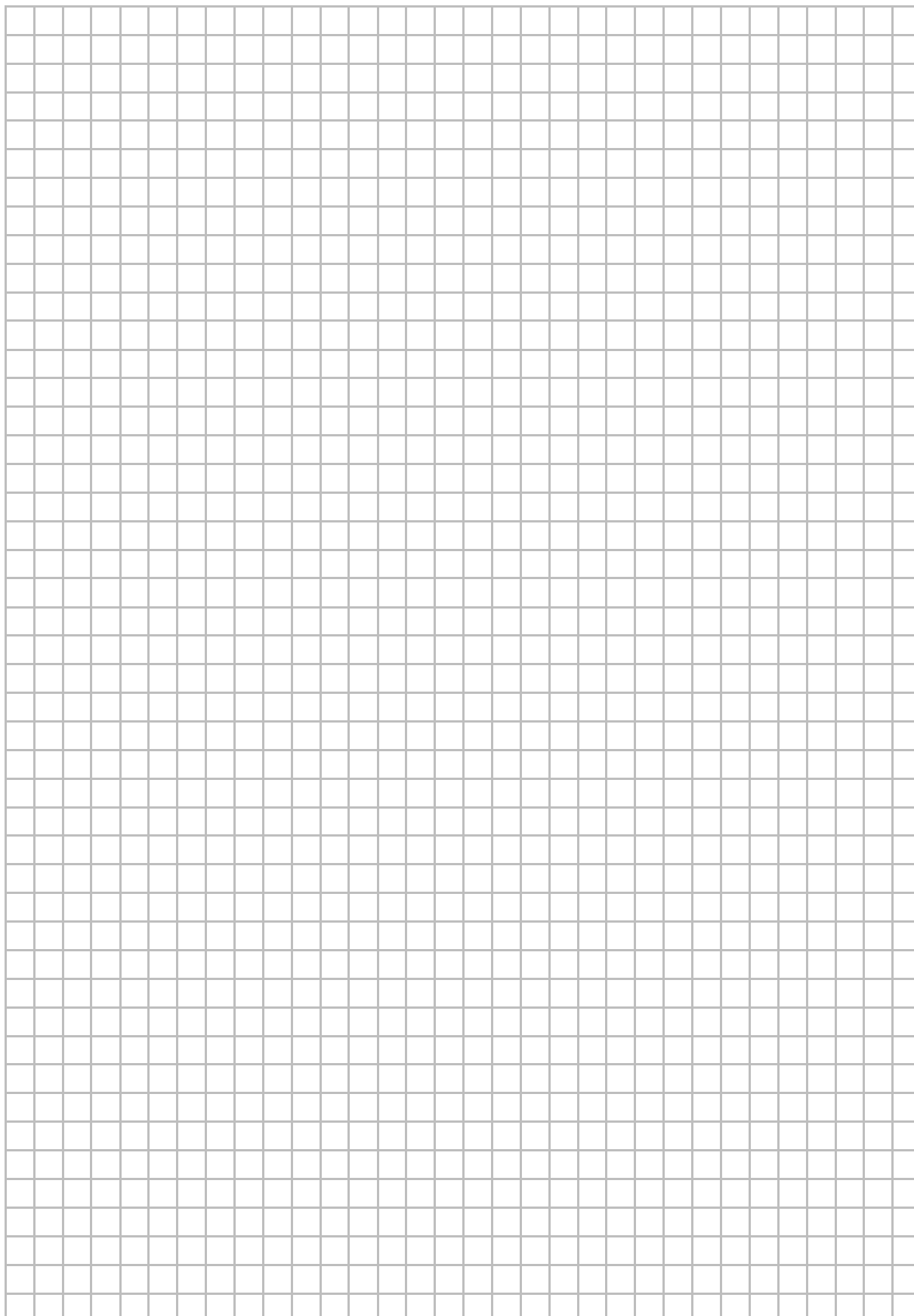
Ciąg (b_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny.

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (b_n) . Ponadto $a_3 = b_4$. Oblicz b_1 .



Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.



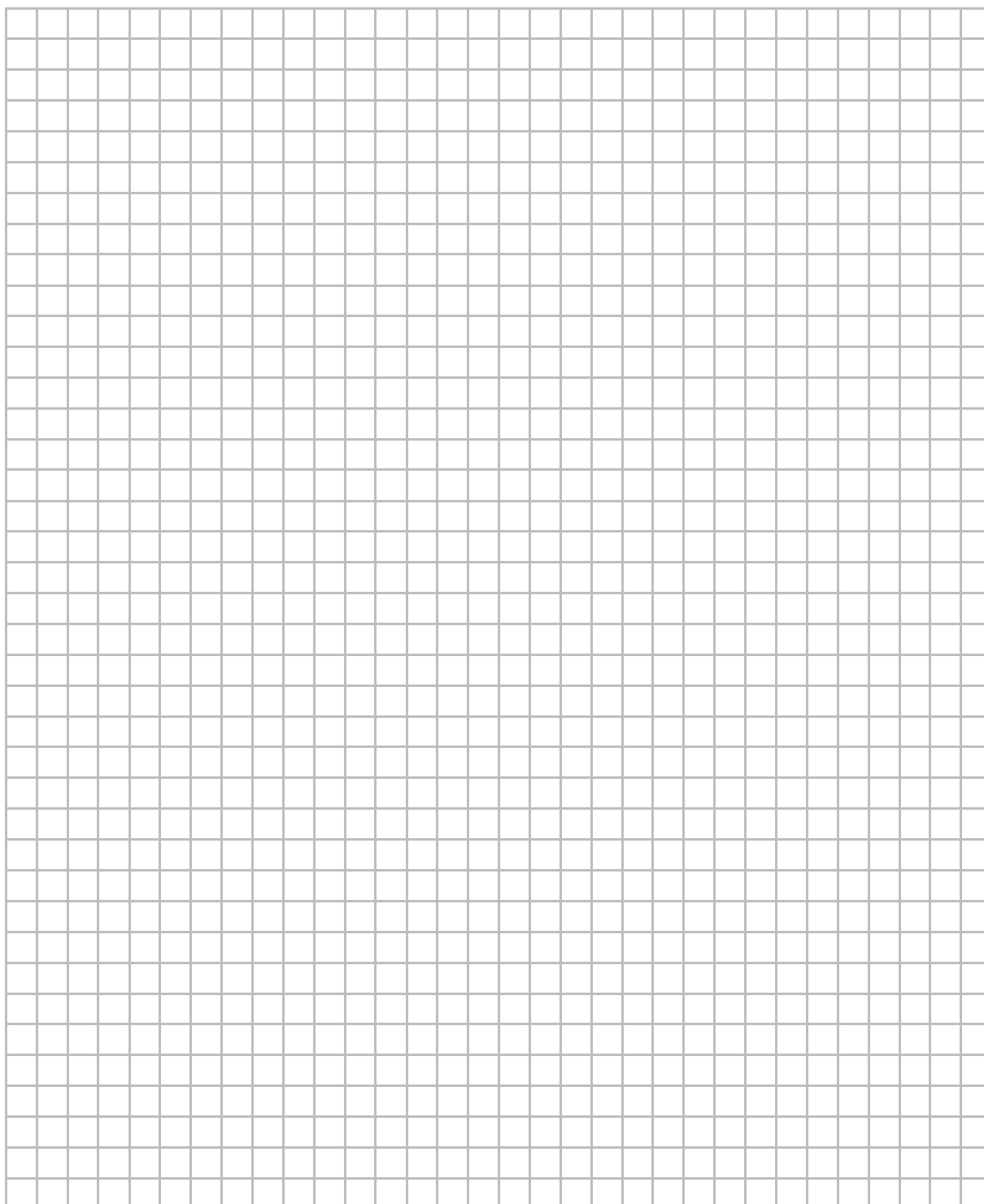
Zadanie 12. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (m + 1)x + m = 0$$

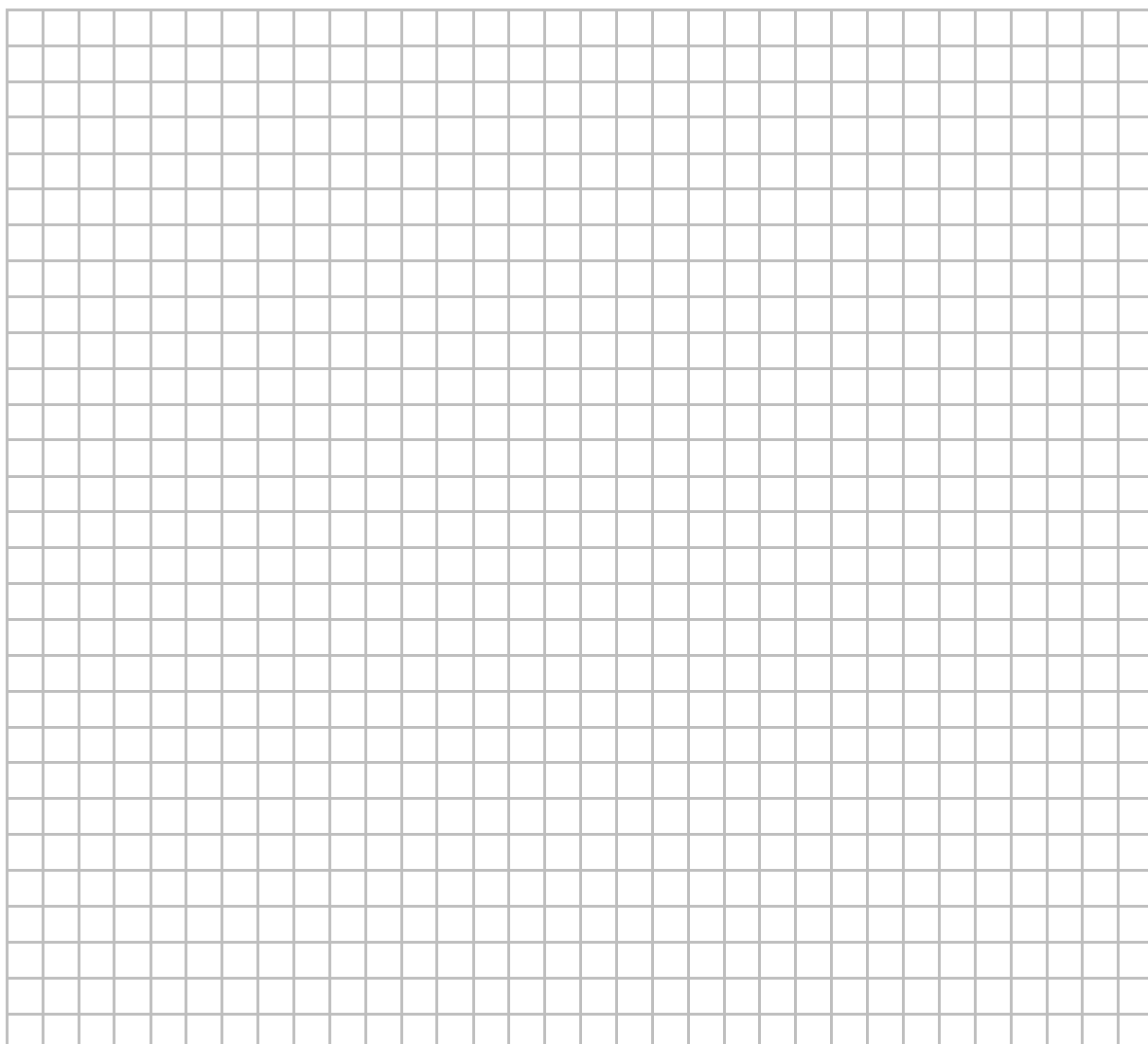
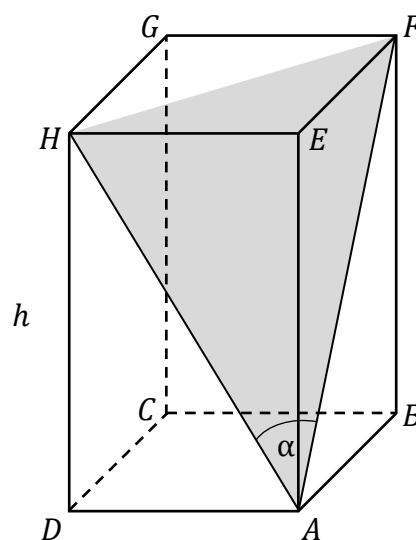
ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$



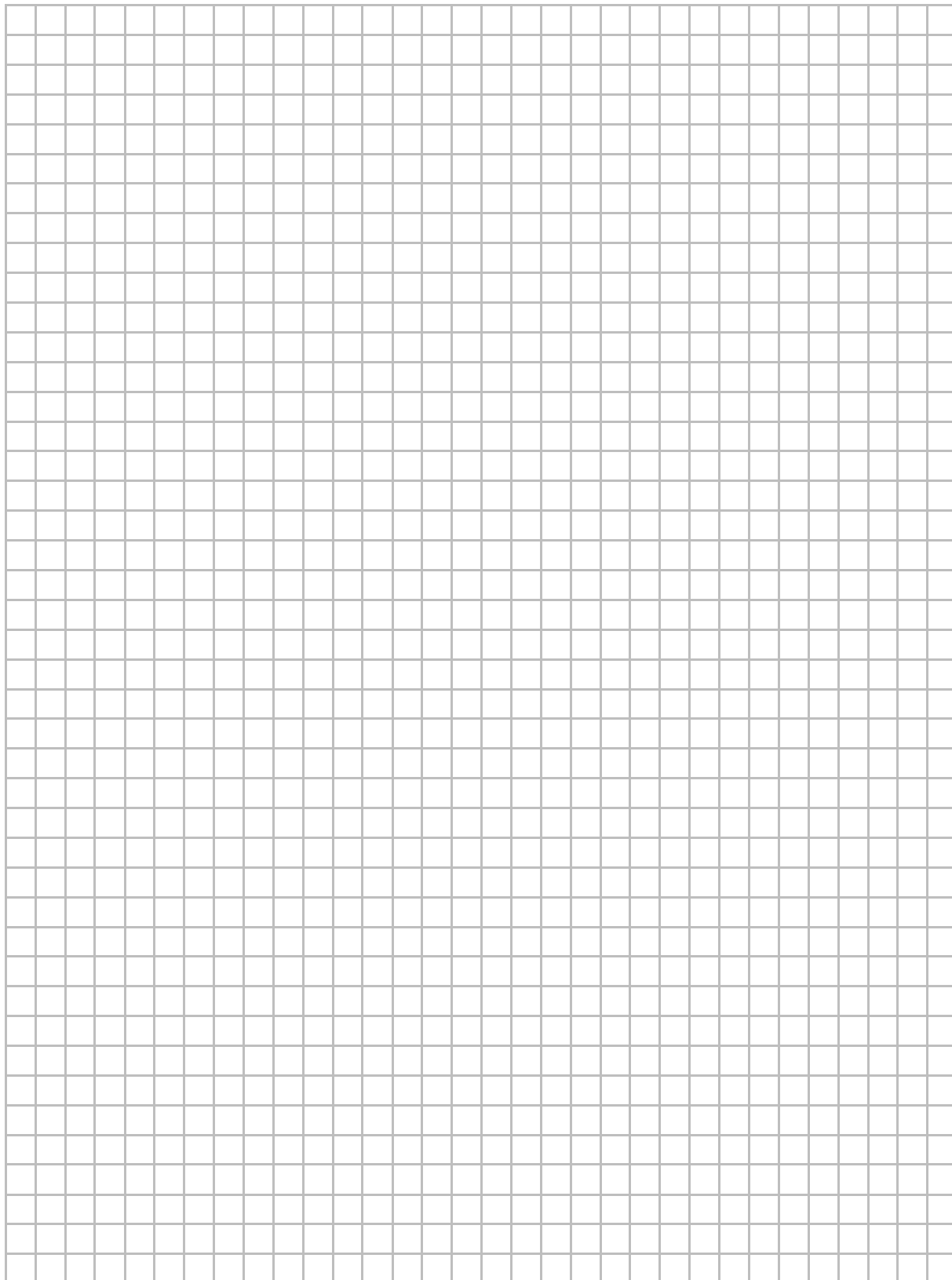
Zadanie 13. (0–5)

Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4. Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.



Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A = (-3, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC zawarty jest w prostej o równaniu $y = x - 1$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym 18.

- a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości b ramienia, wyraża się wzorem $P(b) = \frac{(18-2b) \cdot \sqrt{18b-81}}{2}$.
- b) Wyznacz dziedzinę funkcji P .
- c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole.

