

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wiadomo, że $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$. Wtedy liczba $\log_{18} 40$ jest równa

- A. $\frac{3a+1}{a+b}$ B. $\frac{2a+1}{a+b}$ C. $\frac{2a+1}{a+2b}$ D. $\frac{3a+1}{2b+a}$

Zadanie 2. (0–1)

Granica $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{0,5x^2 + 3,5x + 6}{-x^2 + 2x + 15}$ jest równa

- A. $\left(-\frac{1}{8}\right)$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\left(-\frac{1}{16}\right)$ D. $\frac{7}{4}$

Zadanie 3. (0–1)

Sumą wektorów $\vec{a} = \left[2 + 2m, \frac{2}{3}n + 1\right]$ oraz $\vec{b} = [n + 1, m + 2]$ jest wektor $\vec{c} = [0, 0]$.

Wynika stąd, że

- A. $m = 1$ i $n = 3$.
B. $m = -9$ i $n = -21$.
C. $m = 3$ i $n = -9$.
D. $m = -1$ i $n = 0$.

Zadanie 4. (0–1)

Pole trójkąta ostrokątnego o bokach 5 i 8 jest równe 12. Długość trzeciego boku tego trójkąta jest równa

- A. 5 B. 8 C. $\sqrt{41}$ D. $\sqrt{143}$

Zadanie 5. (0–2)

Wśród 390 pracowników pewnej firmy jest 150 kobiet i 240 mężczyzn. Wśród nich w wieku przedemerytalnym jest 21 kobiet i 43 mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany pracownik tej firmy jest w wieku przedemerytalnym – pod warunkiem że jest mężczyzną.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

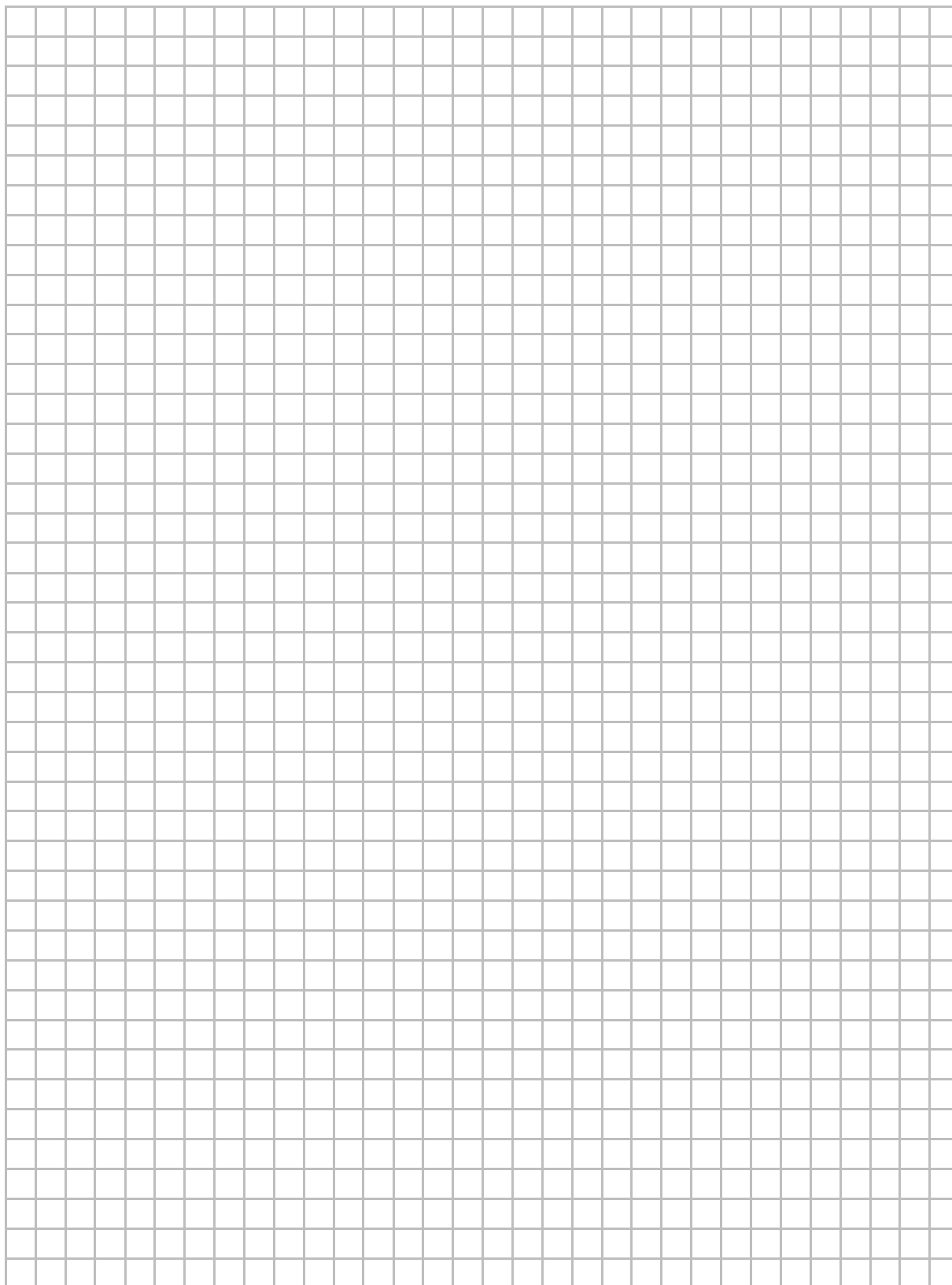
BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

[illegible]

Zadanie 6. (0–3)

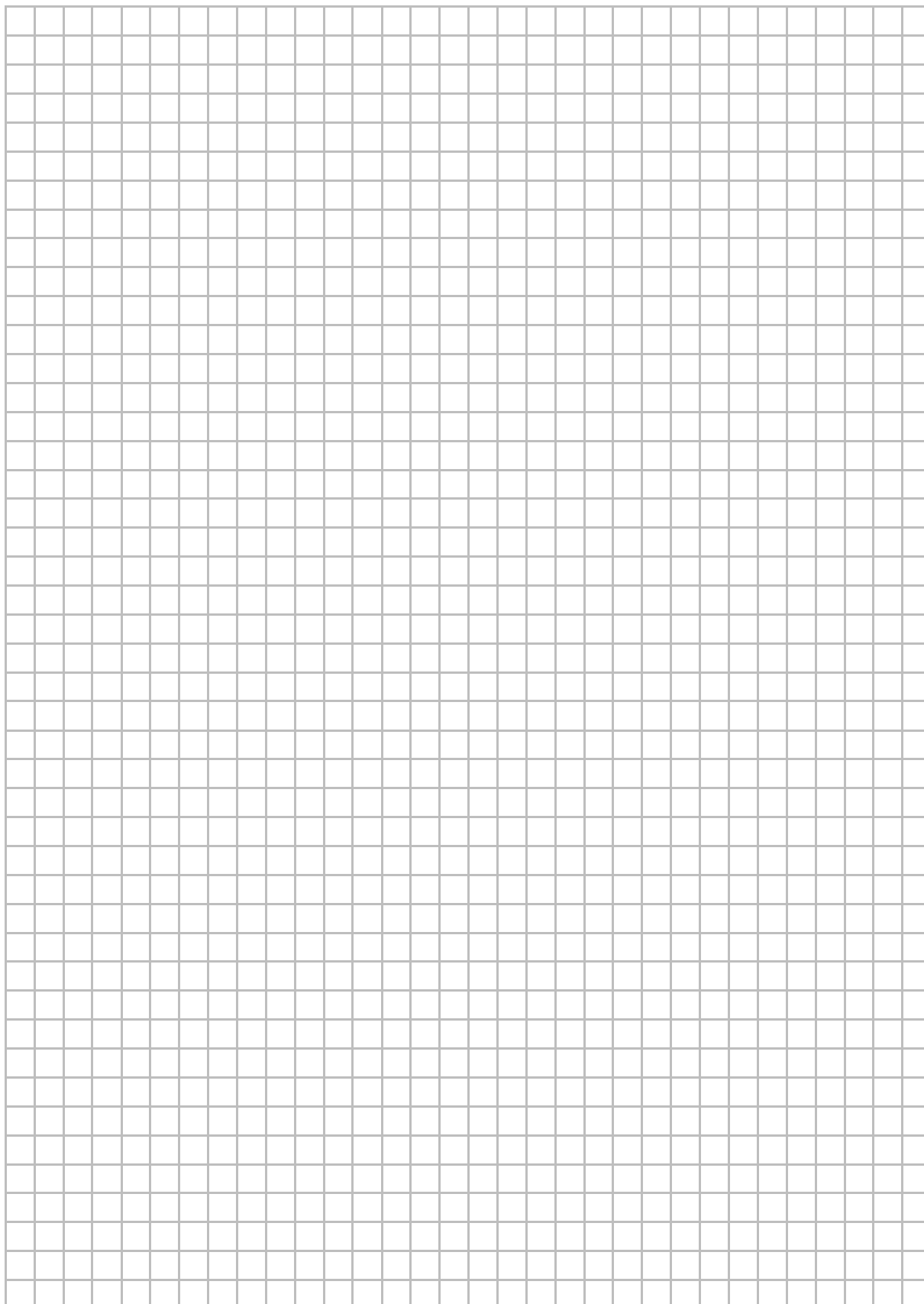
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$, spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$



Zadanie 7. (0–3)

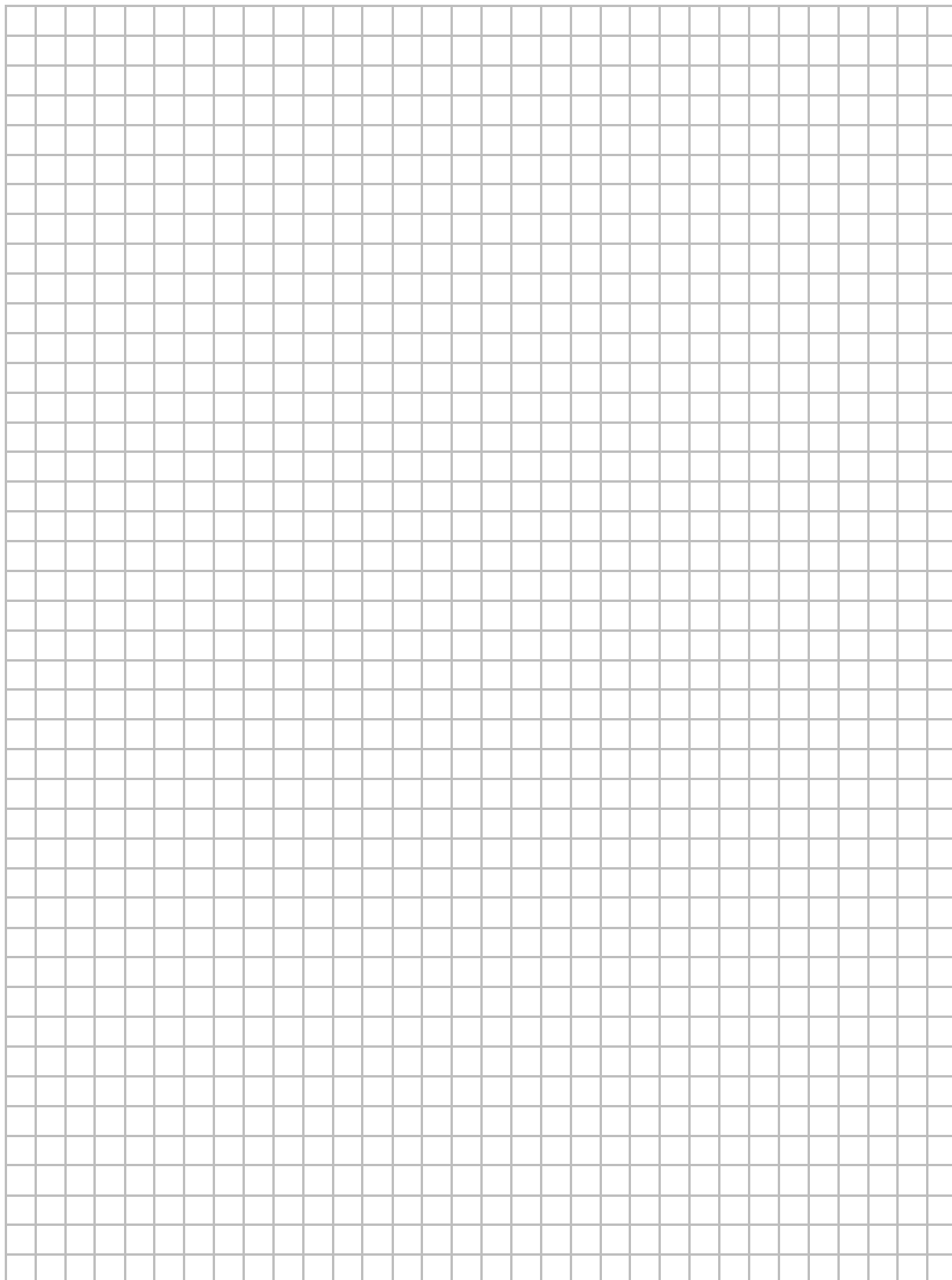
Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

A large grid of graph paper, consisting of 30 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to perform calculations or draw diagrams.

Zadanie 8. (0–3)

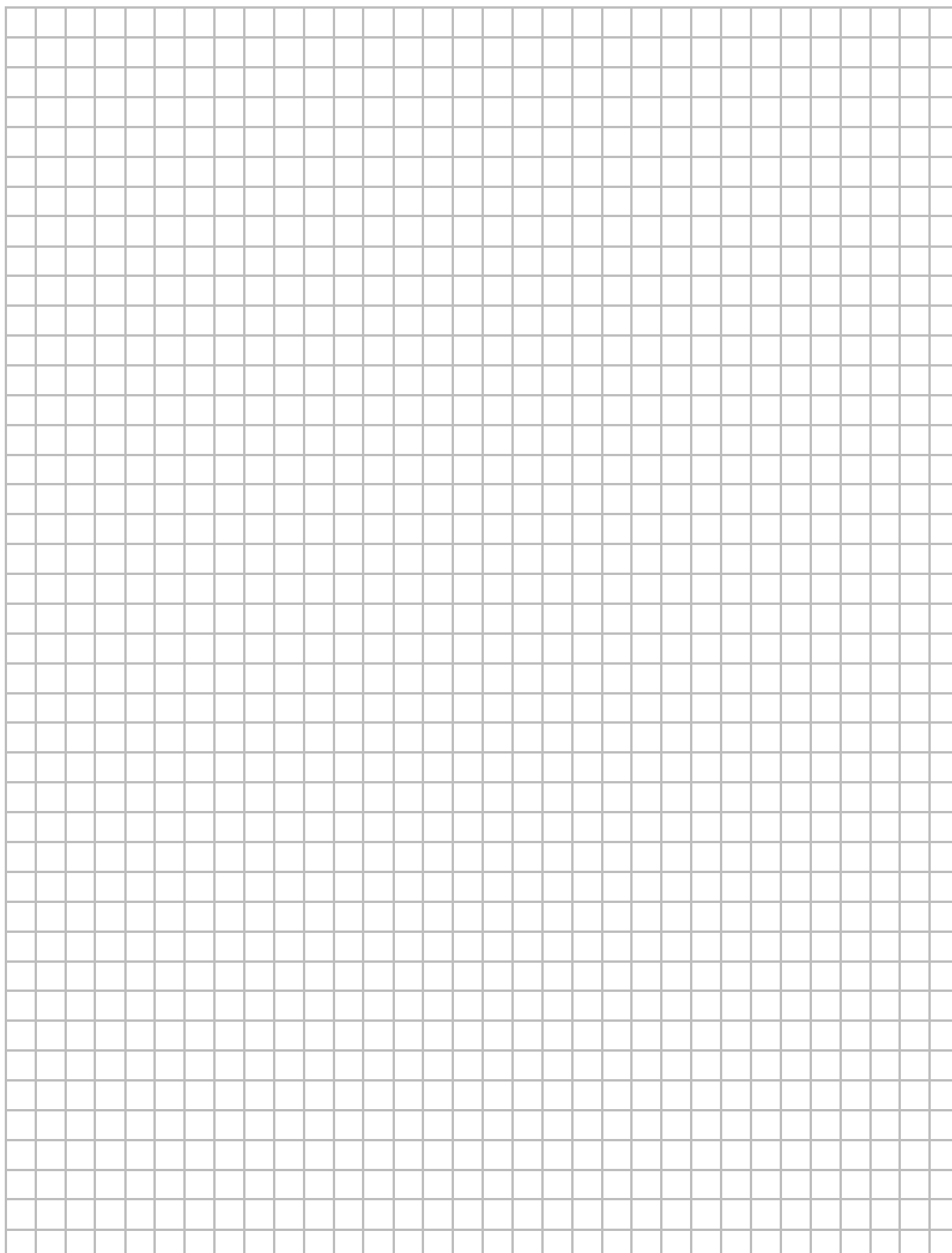
Rozwiąż nierówność

$$\frac{3x + 1}{2x + 1} \leq \frac{3x + 4}{2x + 3}$$



Zadanie 9. (0–3)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przez punkt O przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków BC i AD . Prosta równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie B' , a prosta równoległa do boku AD przecina bok AB w punkcie A' . Wykaż, że $|AA'| = |BB'|$.

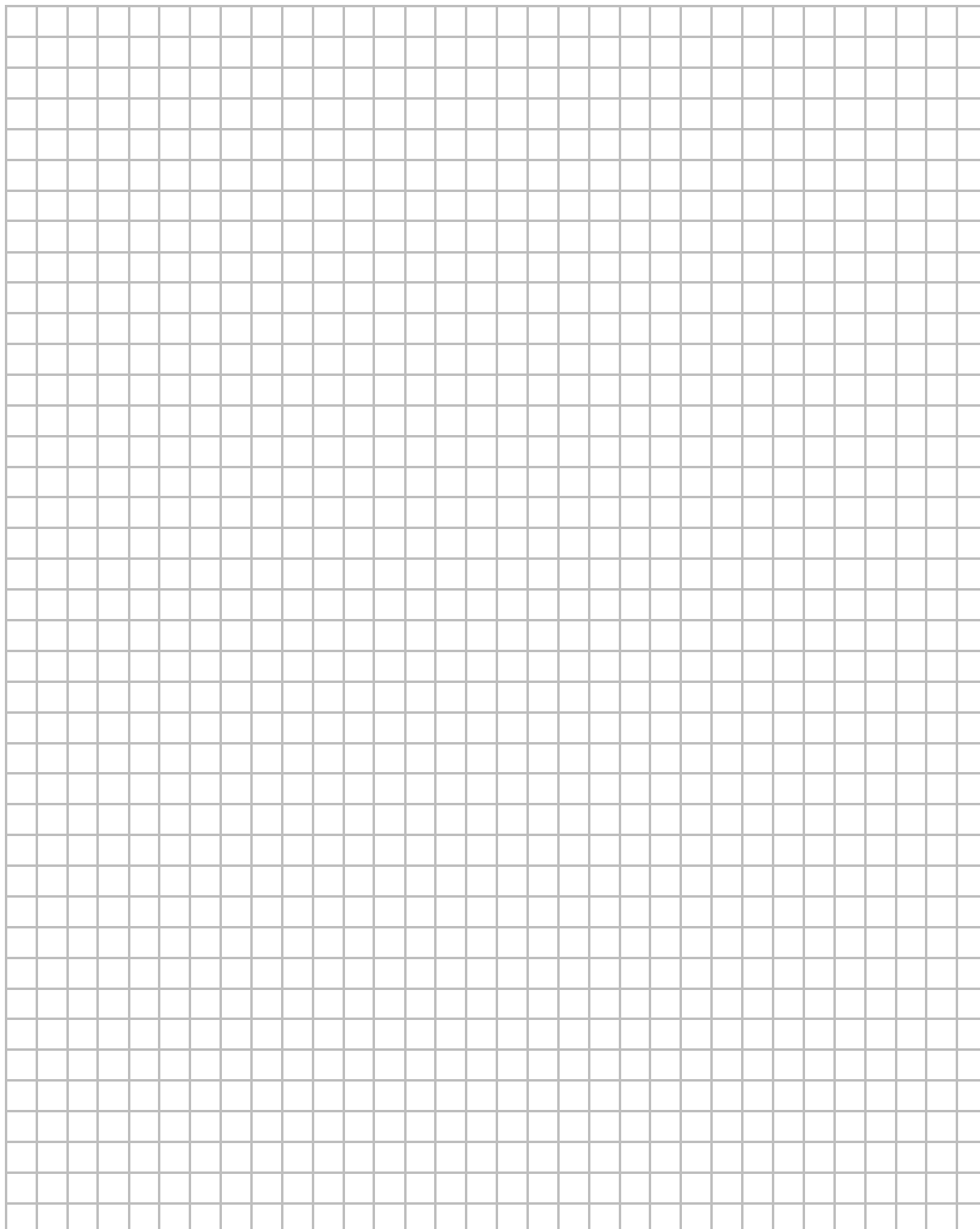


Zadanie 10. (0–4)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego iloraz q jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$.

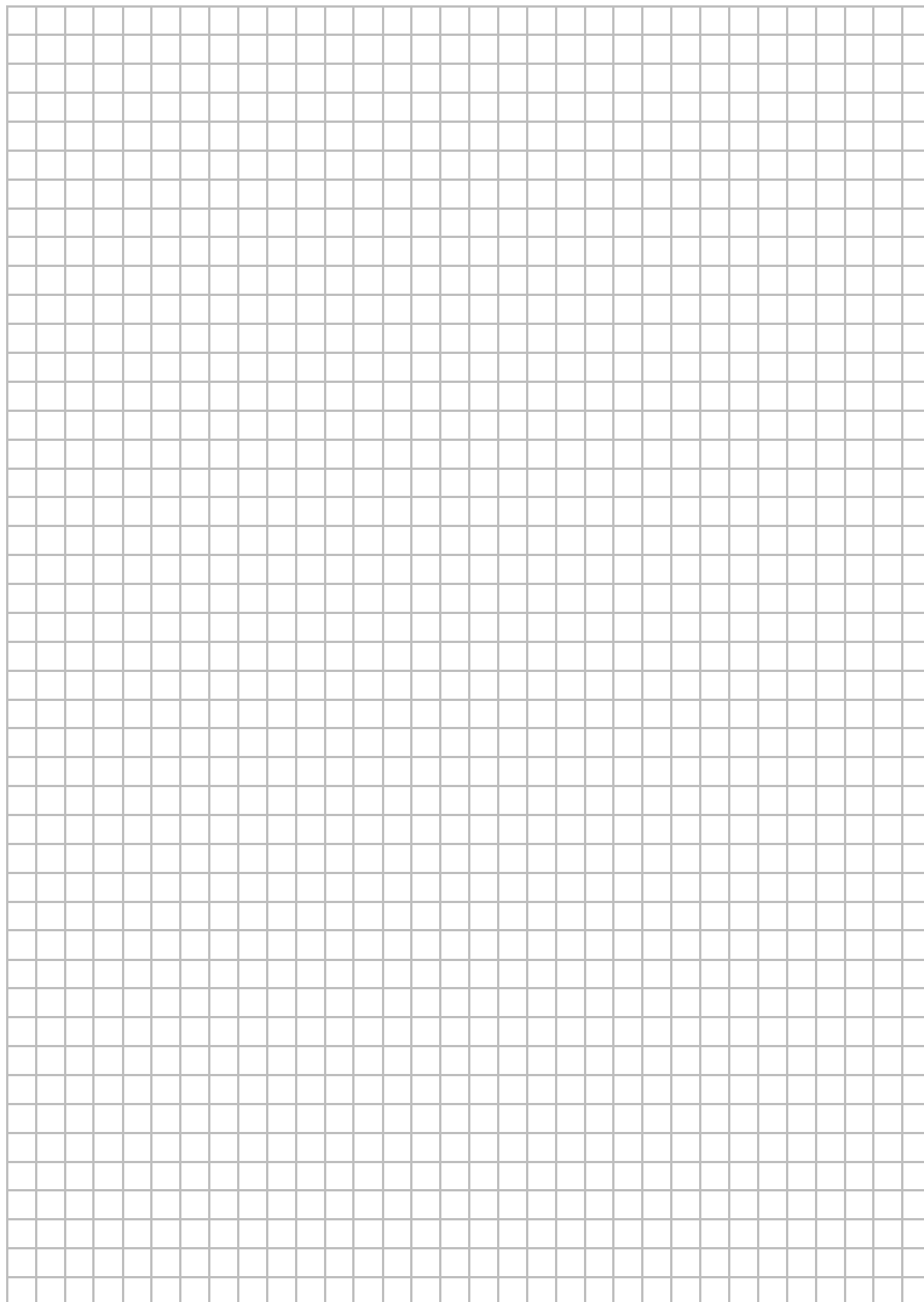
Stosunek sumy S_N wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy S_P wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum,

tj. $\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P$. Oblicz q .



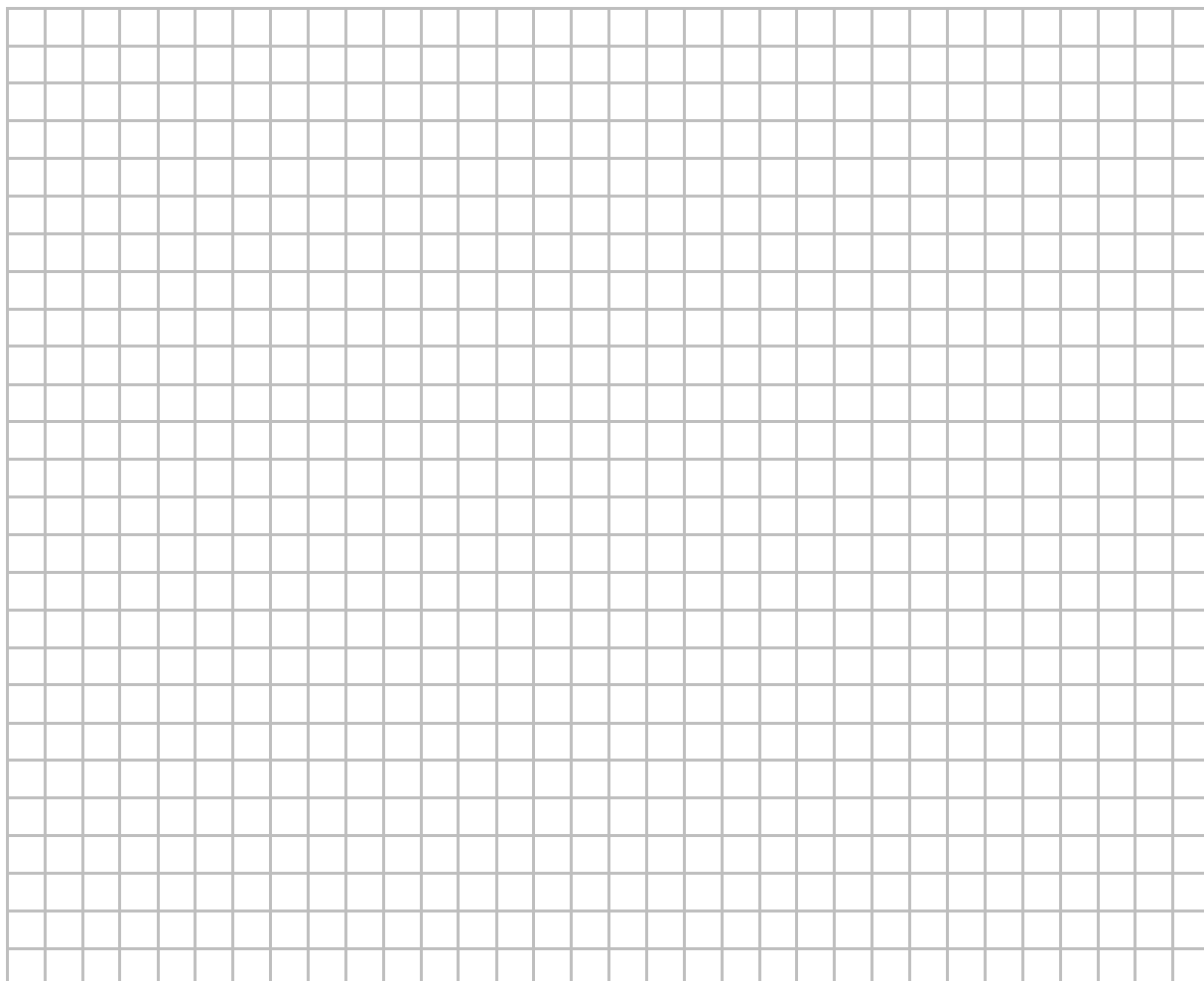
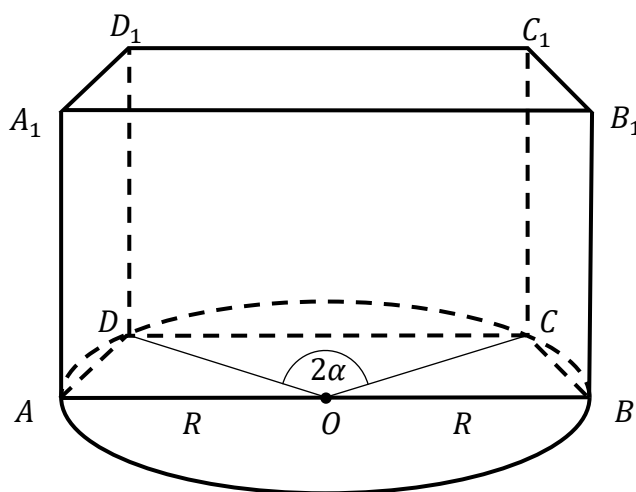
Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.



Zadanie 12. (0–5)

Podstawą graniastopłu prostego $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ jest trapez równoramienny $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O i promieniu R . Dłuższa podstawa AB trapezu jest średnicą tego okręgu, a krótsza – cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu o mierze 2α (zobacz rysunek). Przekątna ściany bocznej zawierającej ramię trapezu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α . Wyznacz objętość tego graniastopłu jako funkcję promienia R i miary kąta α .



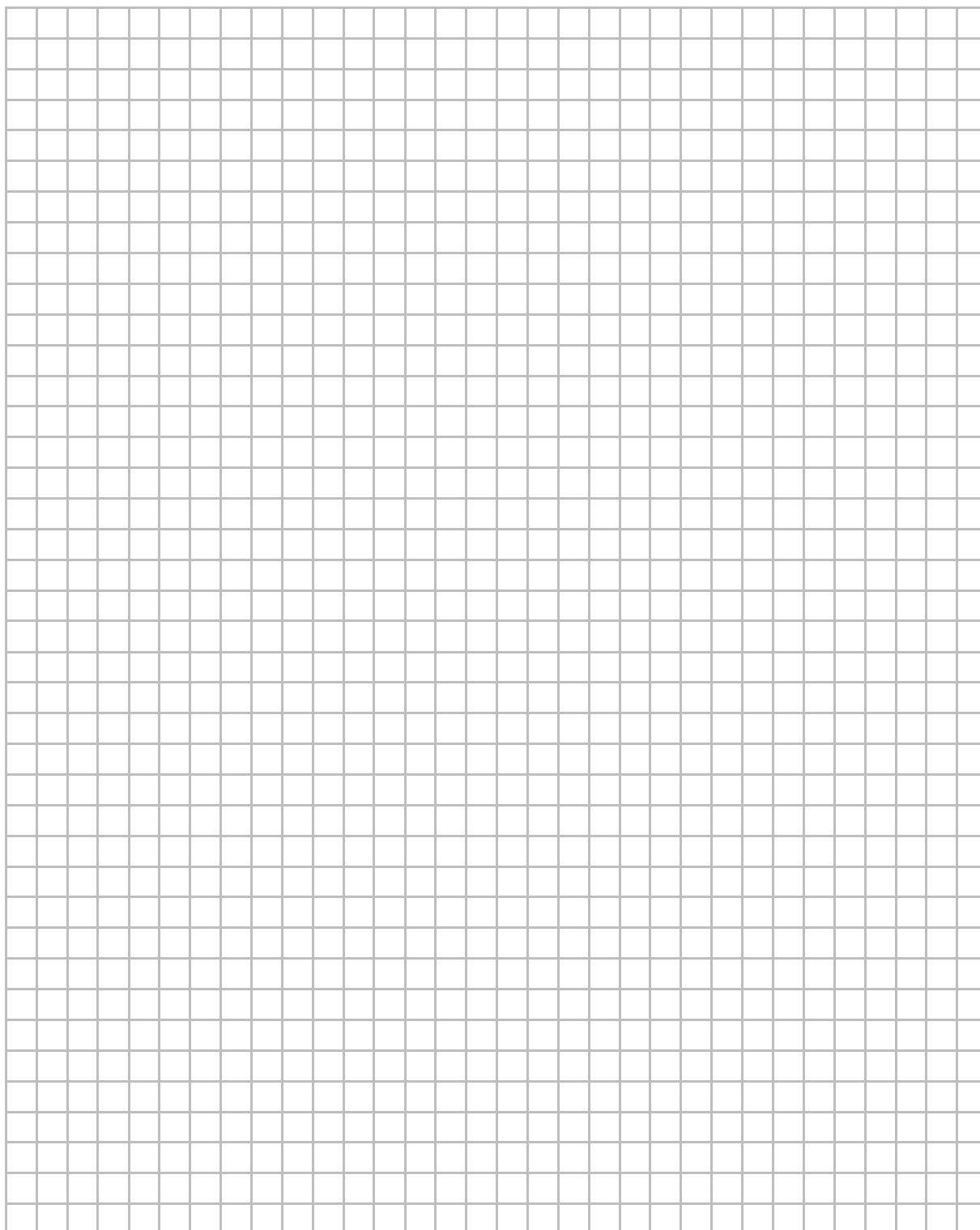
Zadanie 13. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(x - 4)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6] = 0$$

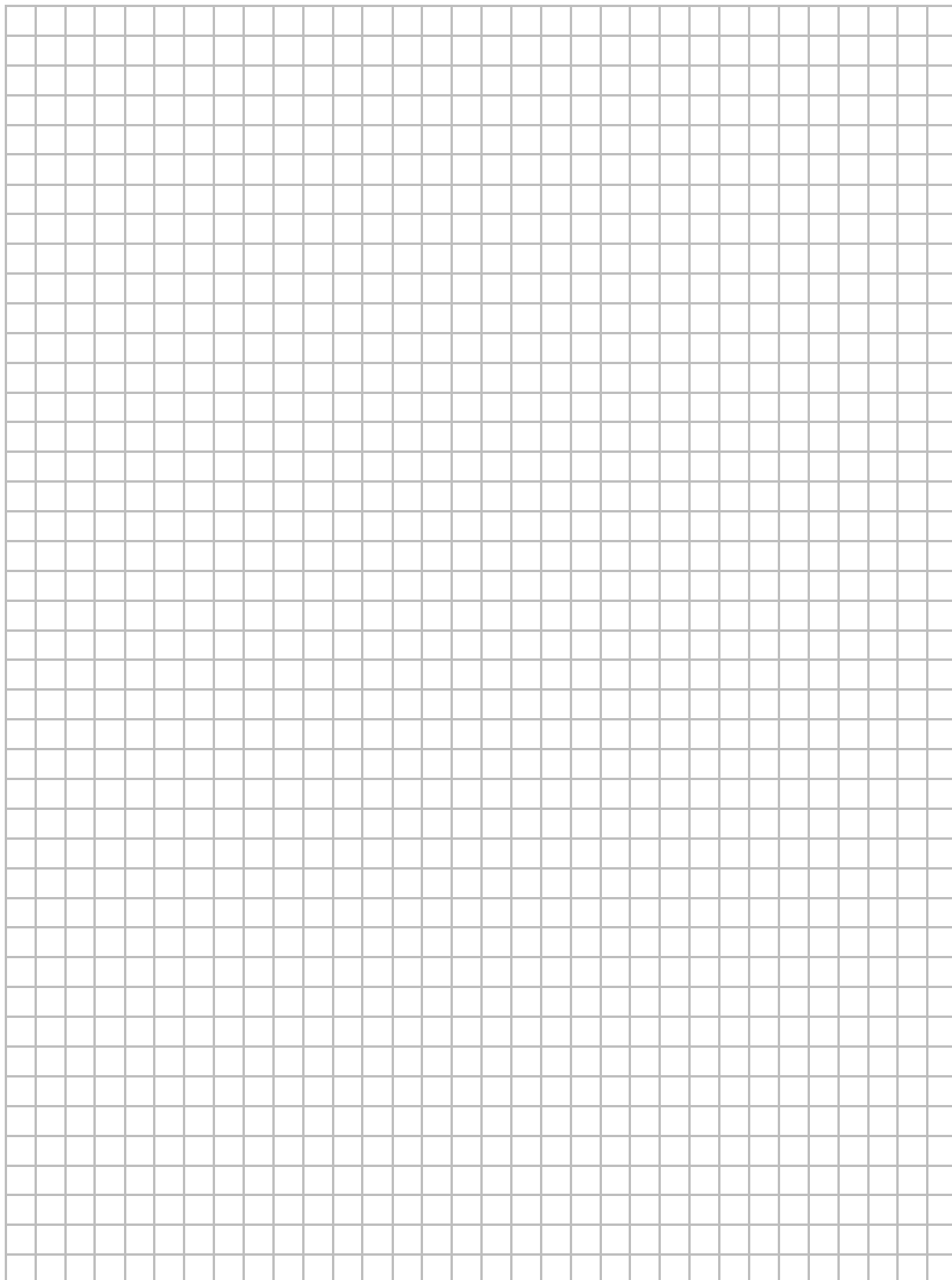
ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 oraz x_3 , spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$$



Zadanie 14. (0–6)

Dane są okrąg o_1 o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 98$ oraz okrąg o_2 o promieniu $2\sqrt{5}$. Środki okręgów o_1 i o_2 leżą po różnych stronach prostej k o równaniu $y = -3x - 6$, a punkty wspólne obu okręgów leżą na prostej k . Wyznacz równanie okręgu o_2 .



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne ostrokątne ABC ($|AC| = |BC|$), na których opisano okrąg o promieniu $R = 1$. Niech x oznacza odległość środka okręgu od podstawy AB trójkąta.

- a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości x , wyraża się wzorem $P(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{1 - x^2}$.
- b) Wyznacz dziedzinę funkcji P .
- c) Oblicz długość odcinka x tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

