

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wartość wyrażenia $\left((\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} + 1)^2\right)^3$ jest równa

- A. 512 B. 0 C. $-24\sqrt{3}$ D. $-192\sqrt{3}$

Zadanie 2. (0–1)

Granice $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 4}{n+1}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{an^2 + bn + 4}$ są równe. Stąd wynika, że

- A. $a = 0$ i $b = 0$ B. $|a| = 1$ i $b = 0$
C. $|a| = 1$ i $|b| = 1$ D. $a = 0$ i $|b| = 1$

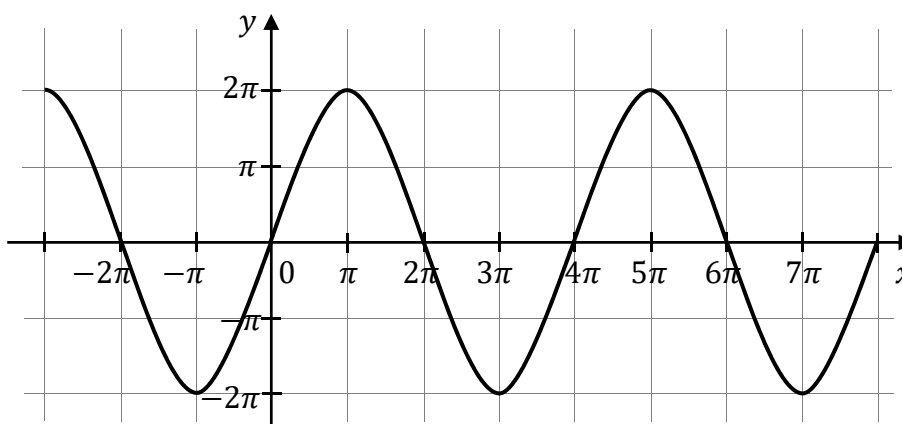
Zadanie 3. (0–1)

Wektory $\vec{a} = [m - 2, m + 2]$ oraz $\vec{b} = [m^{1,5}, 2^{1,5}]$ mają równe długości wtedy i tylko wtedy, gdy

- A. $m = 0$ lub $m = 4$ B. $m = 0$ lub $m = 2$
C. $m = 2$ D. $m = 2$ lub $m = 4$

Zadanie 4. (0–1)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x . Jeden z podanych poniżej wzorów jest wzorem tej funkcji. Wskaż wzór funkcji f .



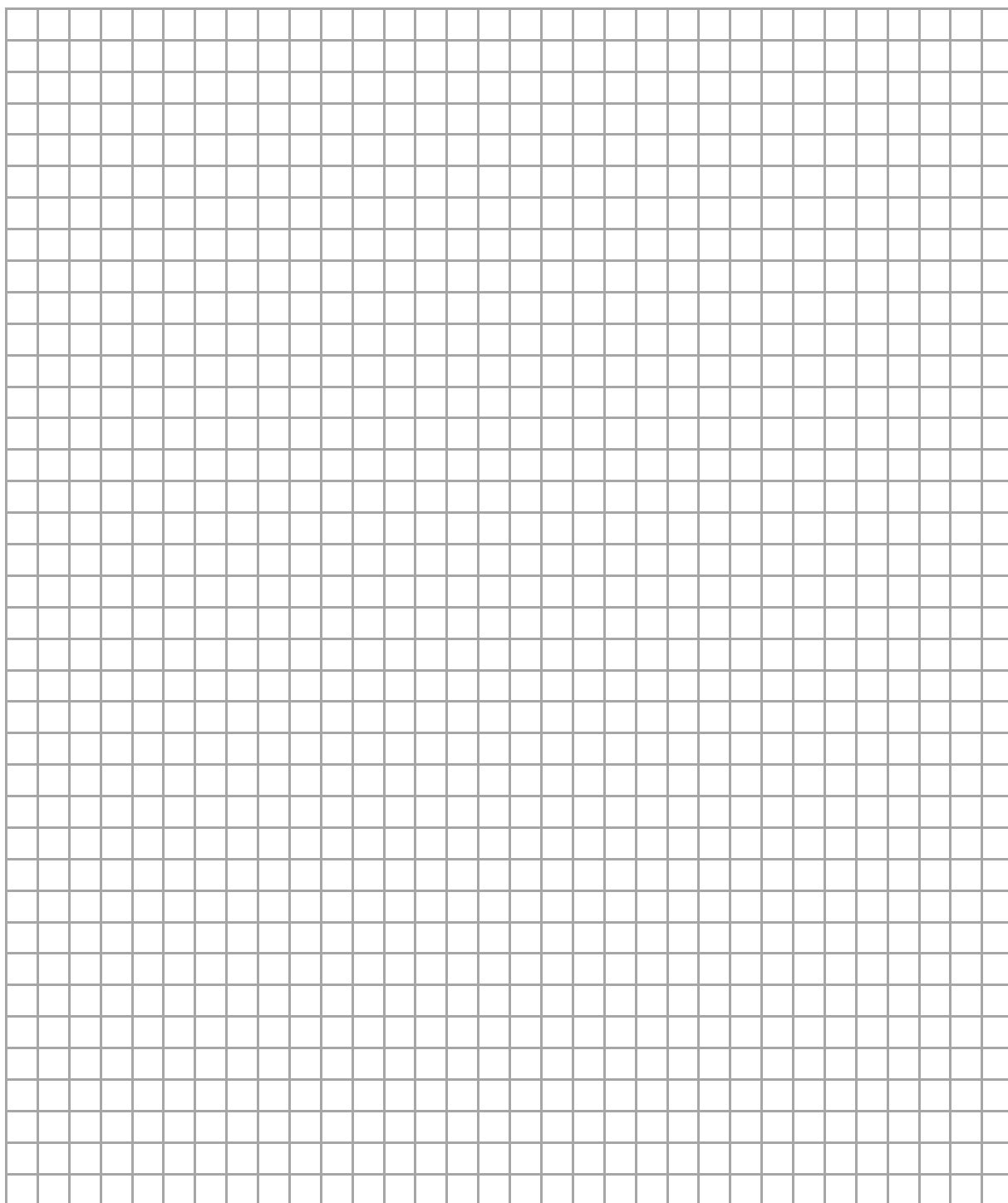
- A. $f(x) = 2 \sin(2x)$ B. $f(x) = 2\pi \cdot \sin(2x)$
C. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ D. $f(x) = 2\pi \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Zadanie 5. (0–2)

Wynikiem dzielenia wielomianu $5x^3 - 7x^2 - 4x - 4$ przez dwumian $x - 2$ jest trójmian kwadratowy postaci $ax^2 + bx + c$.

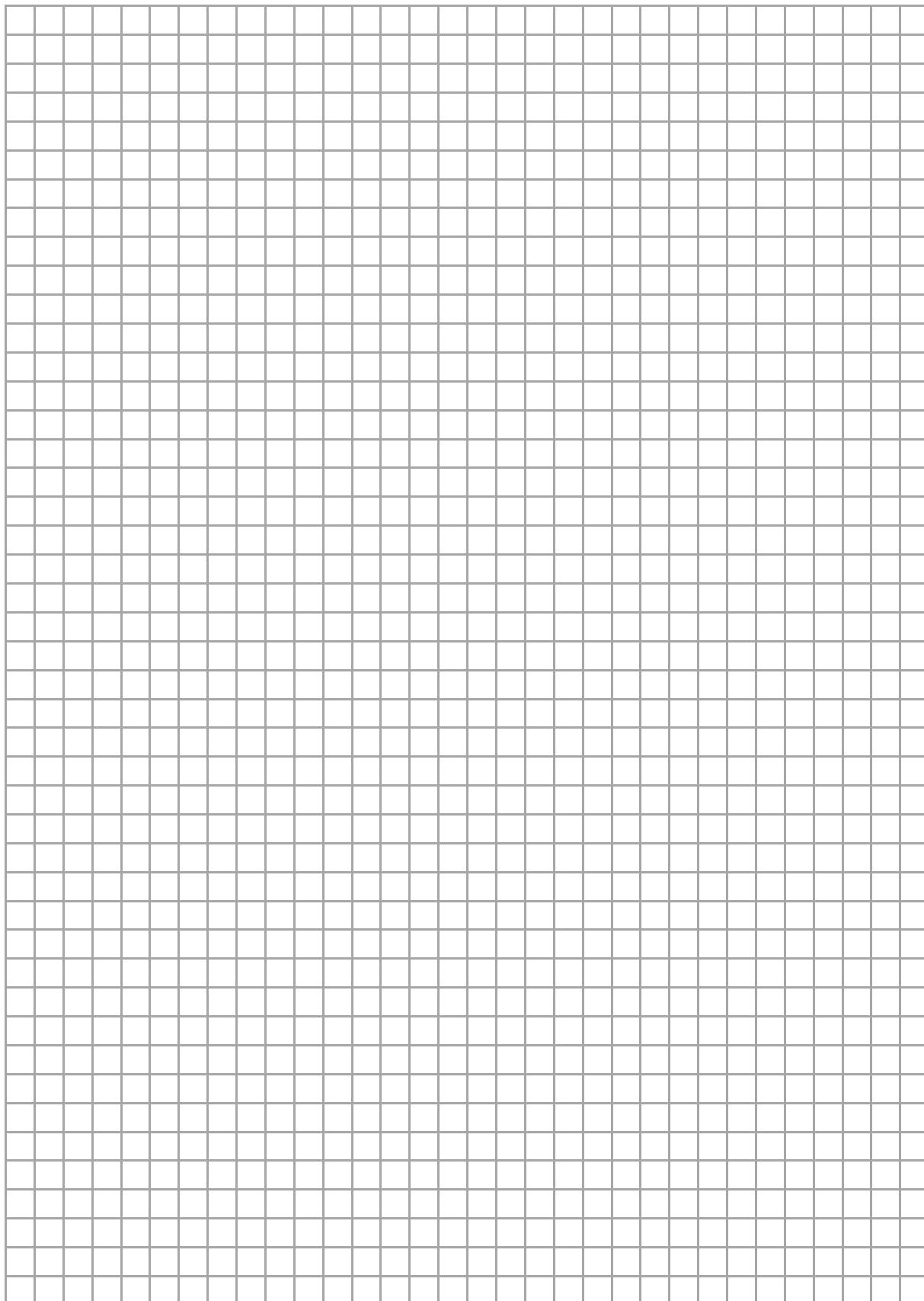
W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – wartości współczynników a , b oraz c .

--	--	--



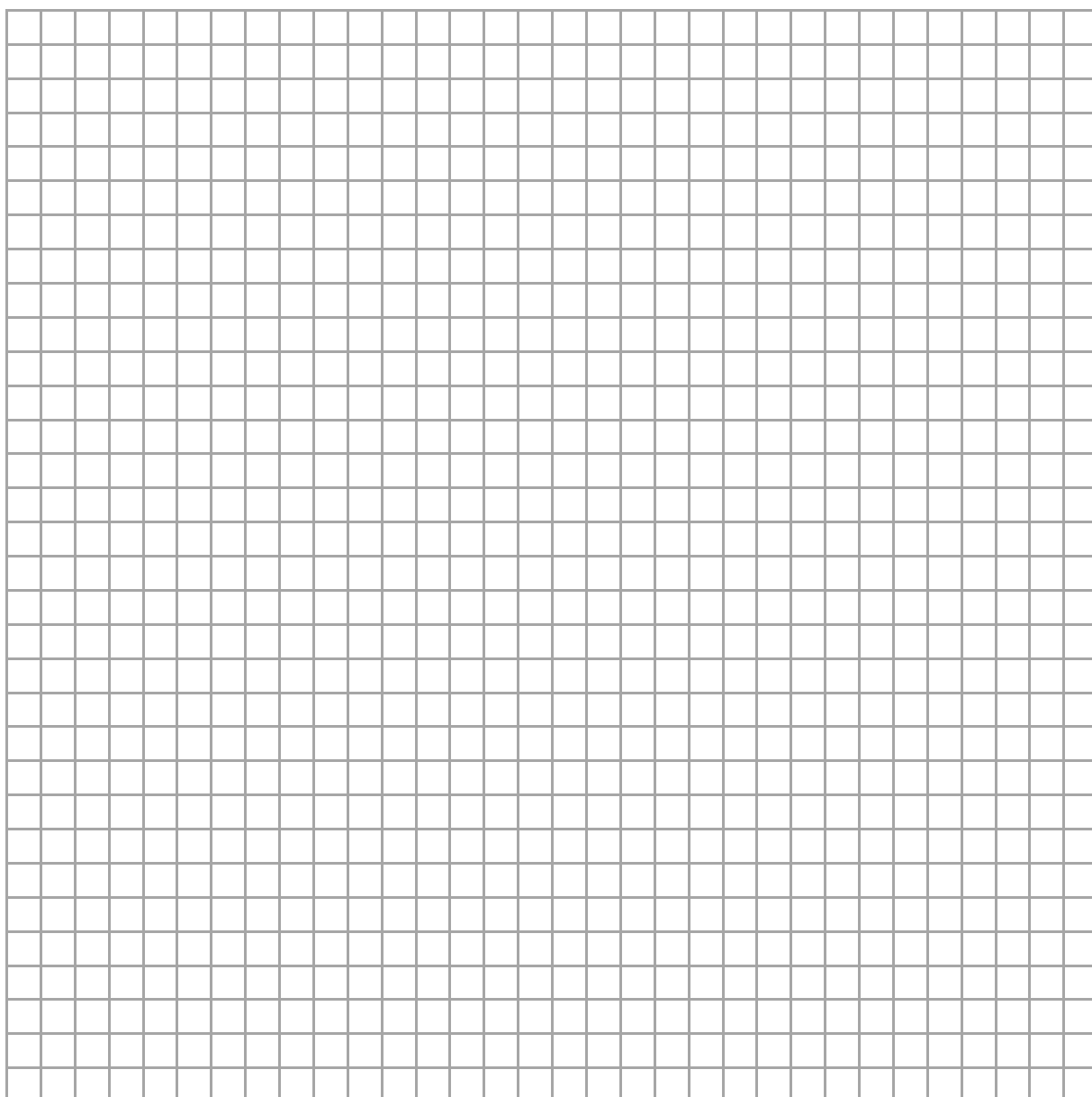
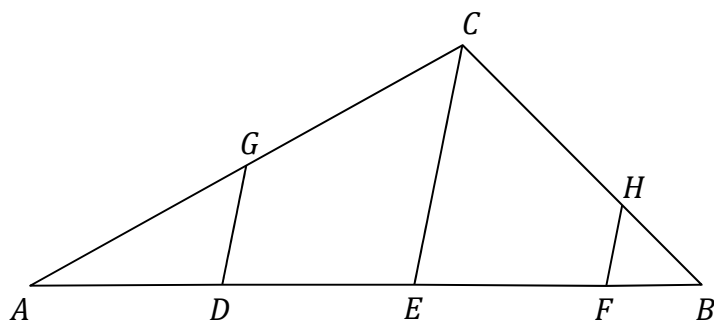
Zadanie 6. (0–3)

Niech $\log_2 9 = c$. Wykaż, że $\log_3 54 = \frac{3c+2}{c}$.



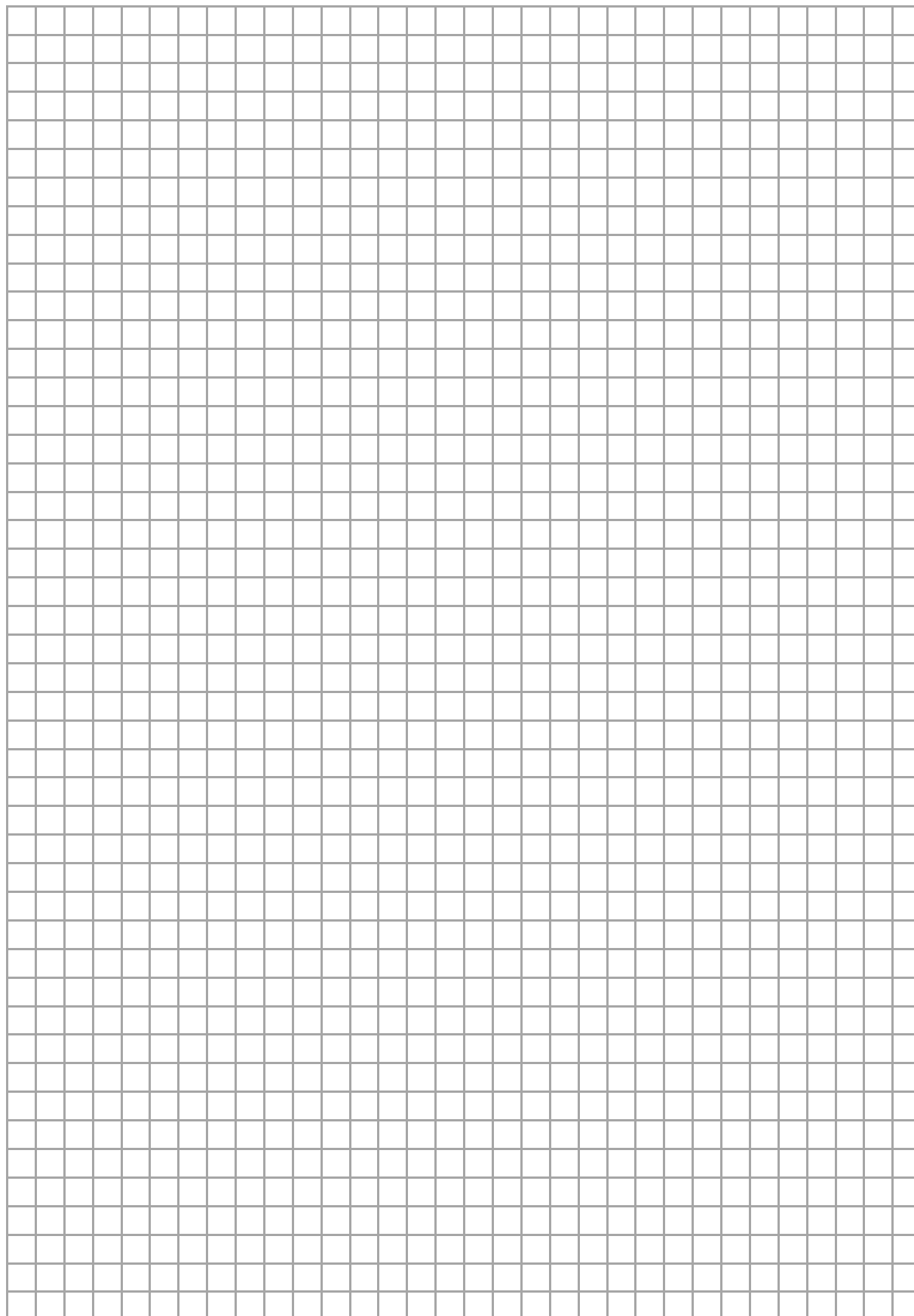
Zadanie 7. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC . Na boku AB tego trójkąta obrano punkty D , E i F tak, że $|AD| = |DE| = |EF| = 2|FB|$. Na bokach AC i BC obrano – odpowiednio – punkty G i H tak, że $DG \parallel EC$ oraz $FH \parallel EC$ (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli pole trójkąta FBH jest równe S , to pole trójkąta ADG jest równe $3S$.



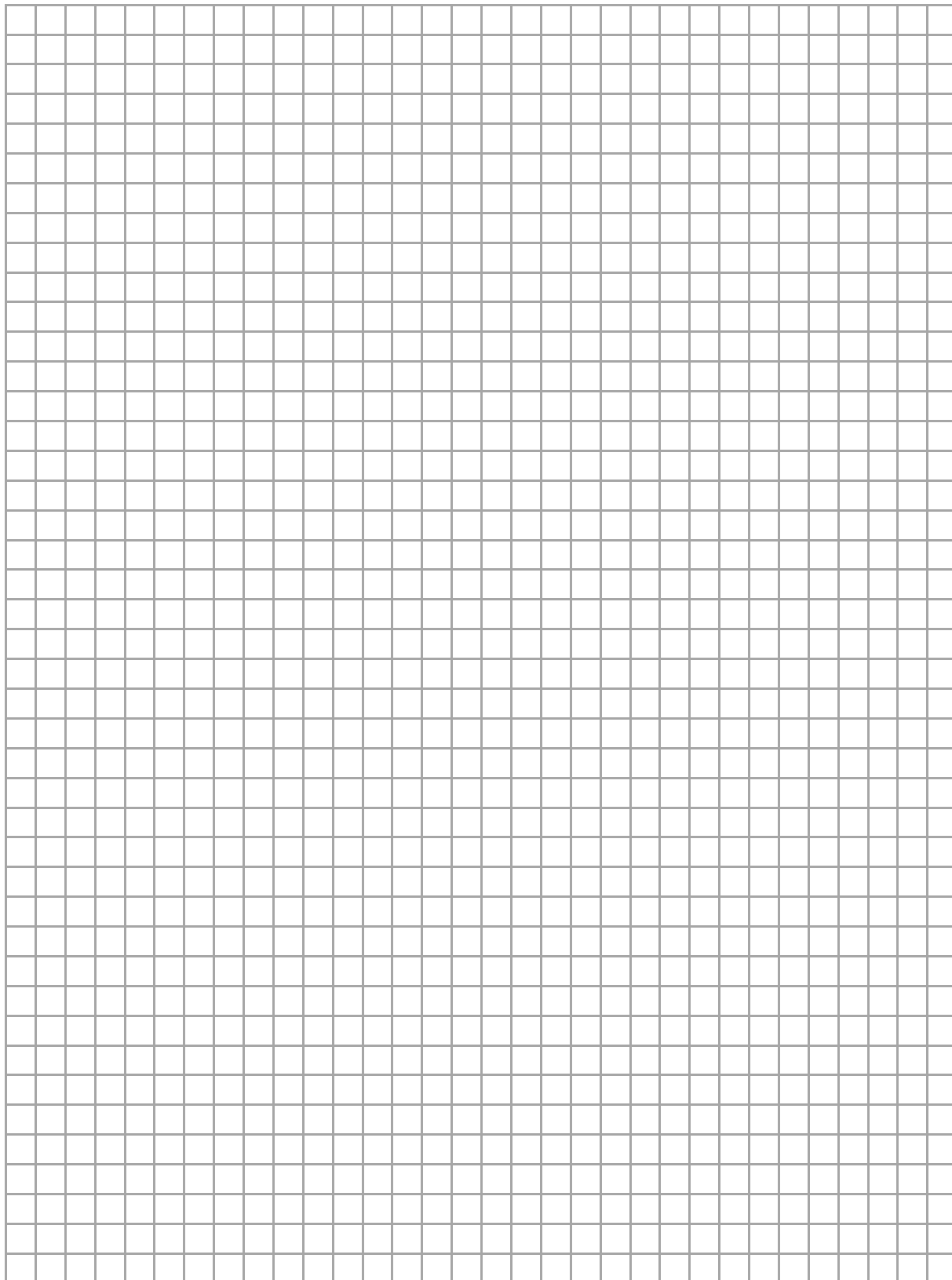
Zadanie 8. (0–4)

Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x - \cos x = \sin(2x) - \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.



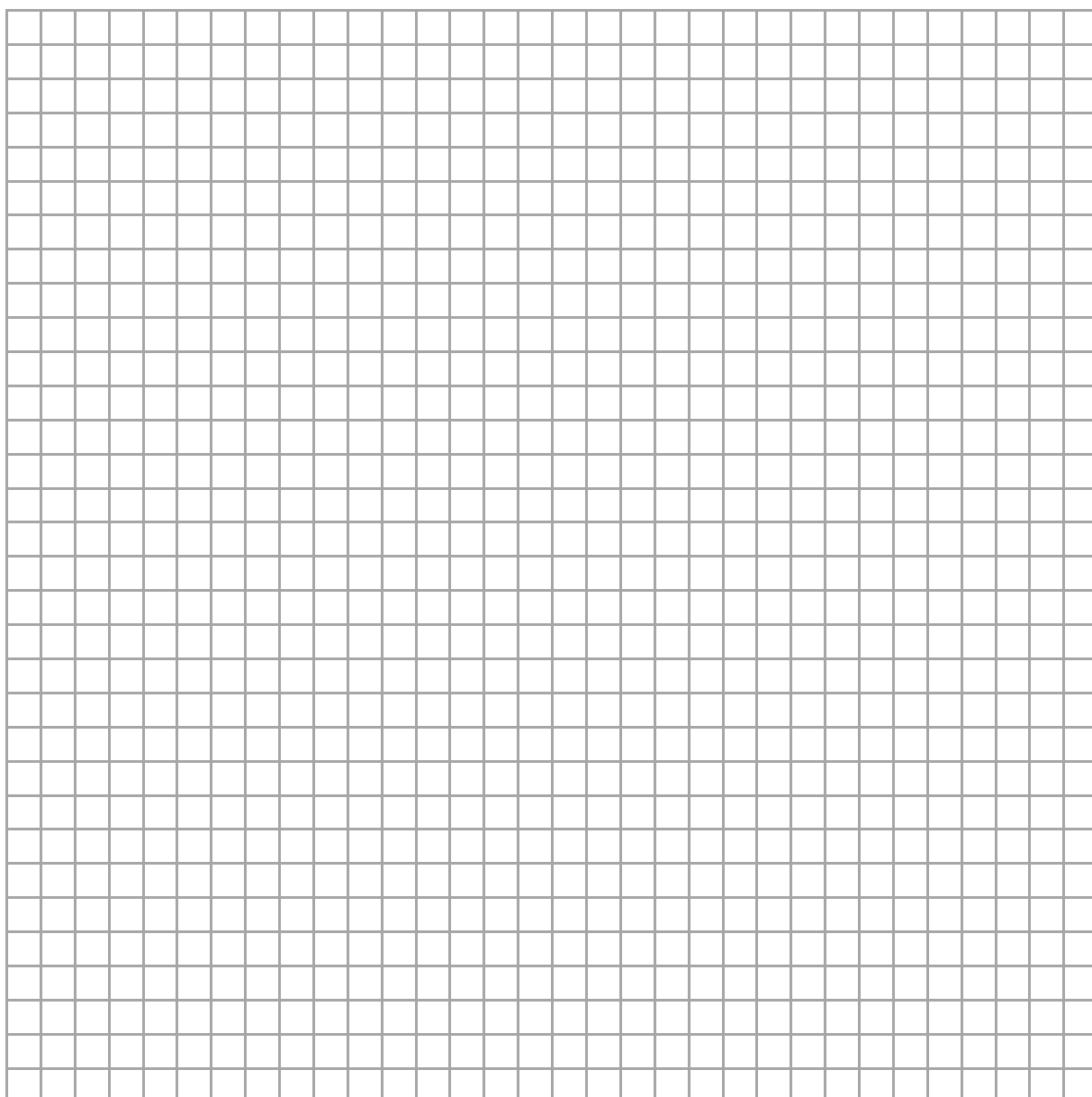
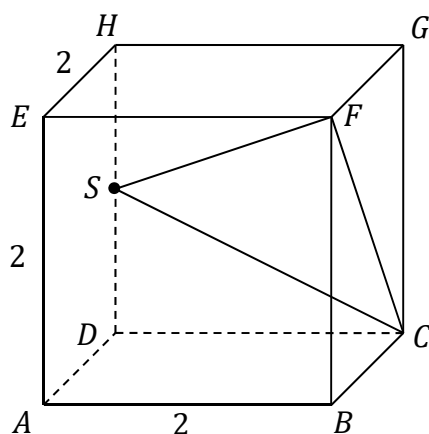
Zadanie 9. (0–4)

Dane są prosta k o równaniu $x - 2y = 0$ i prosta l o równaniu $2x + y - 1 = 0$. Punkt P leży na prostej o równaniu $y = x + 4$. Odległość punktu P od prostej k jest dwa razy większa niż odległość punktu P od prostej l . Oblicz współrzędne punktu P .



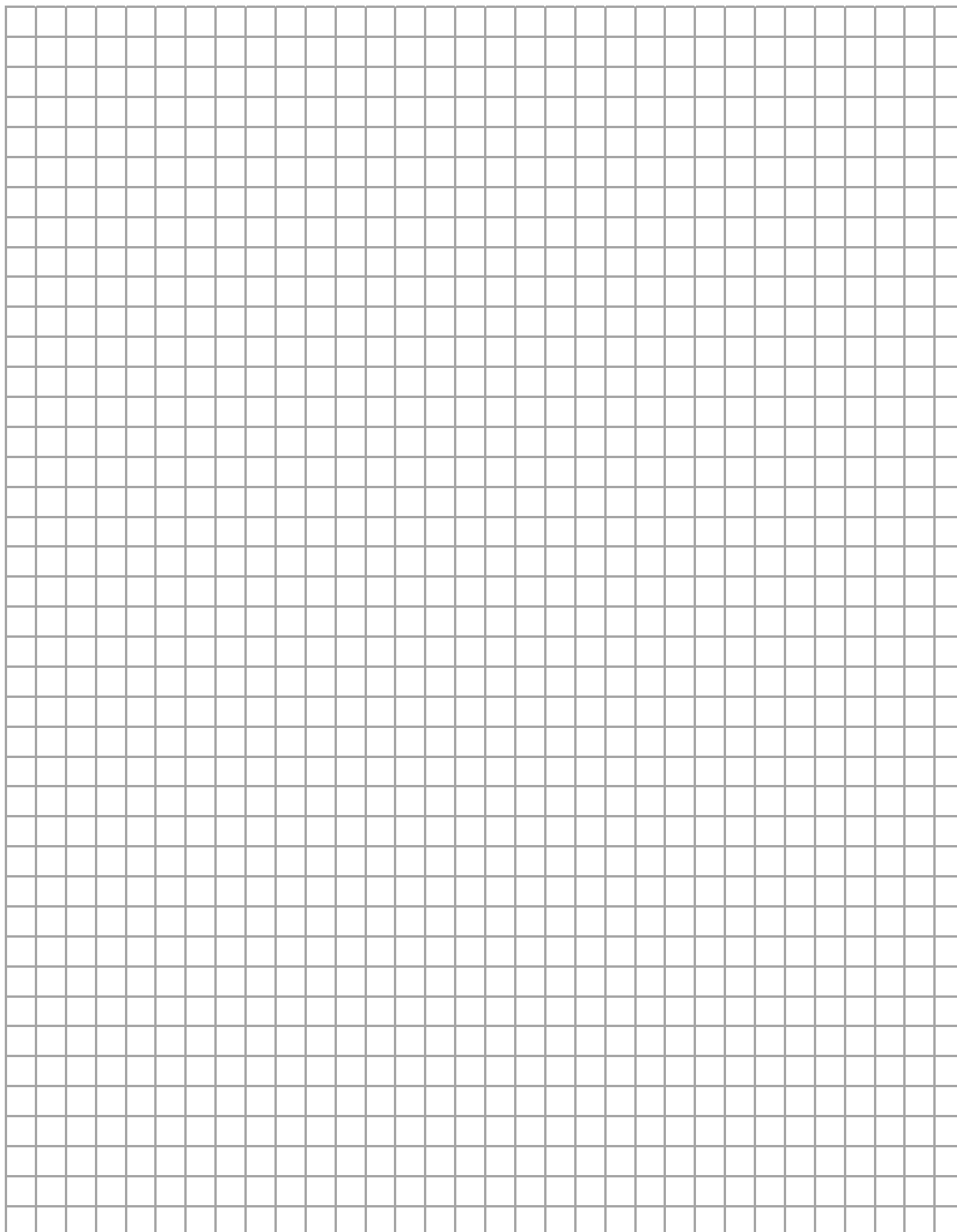
Zadanie 10. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 2. Punkt S jest środkiem krawędzi DH (zobacz rysunek). Oblicz miarę najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta CFS .



Zadanie 11. (0–4)

W pewnym telewizyjnym programie bierze udział trzech sportowców i pewna liczba aktorów. W trakcie tego programu uczestnicy siadają na fotelach w rzędzie, naprzeciw prowadzącego (liczba foteli jest równa liczbie uczestników). Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że cała trójka sportowców będzie siedziała obok siebie przy losowym wyborze miejsc jest równe $\frac{1}{15}$. Oblicz, ilu aktorów bierze udział w tym programie.

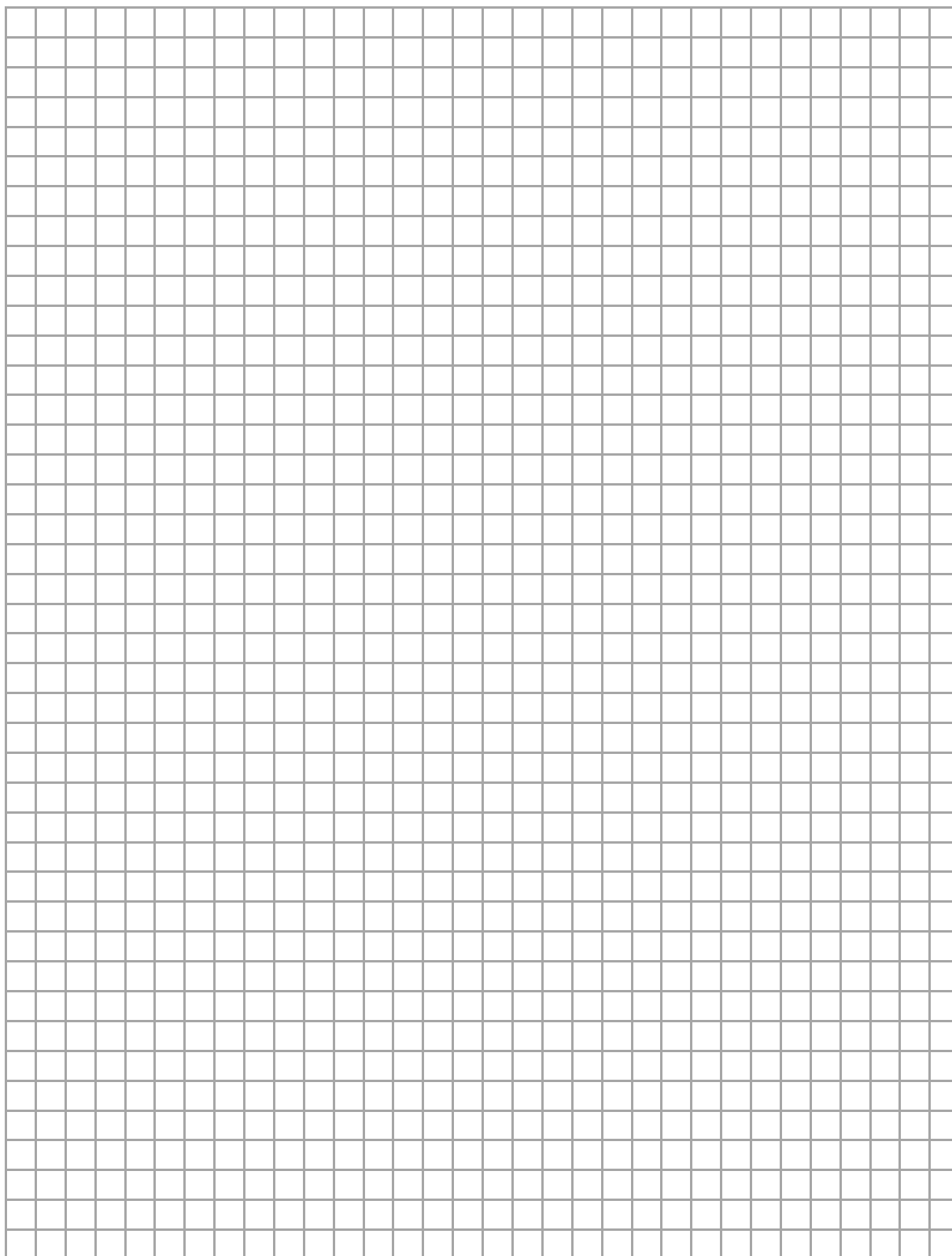


Zadanie 12. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

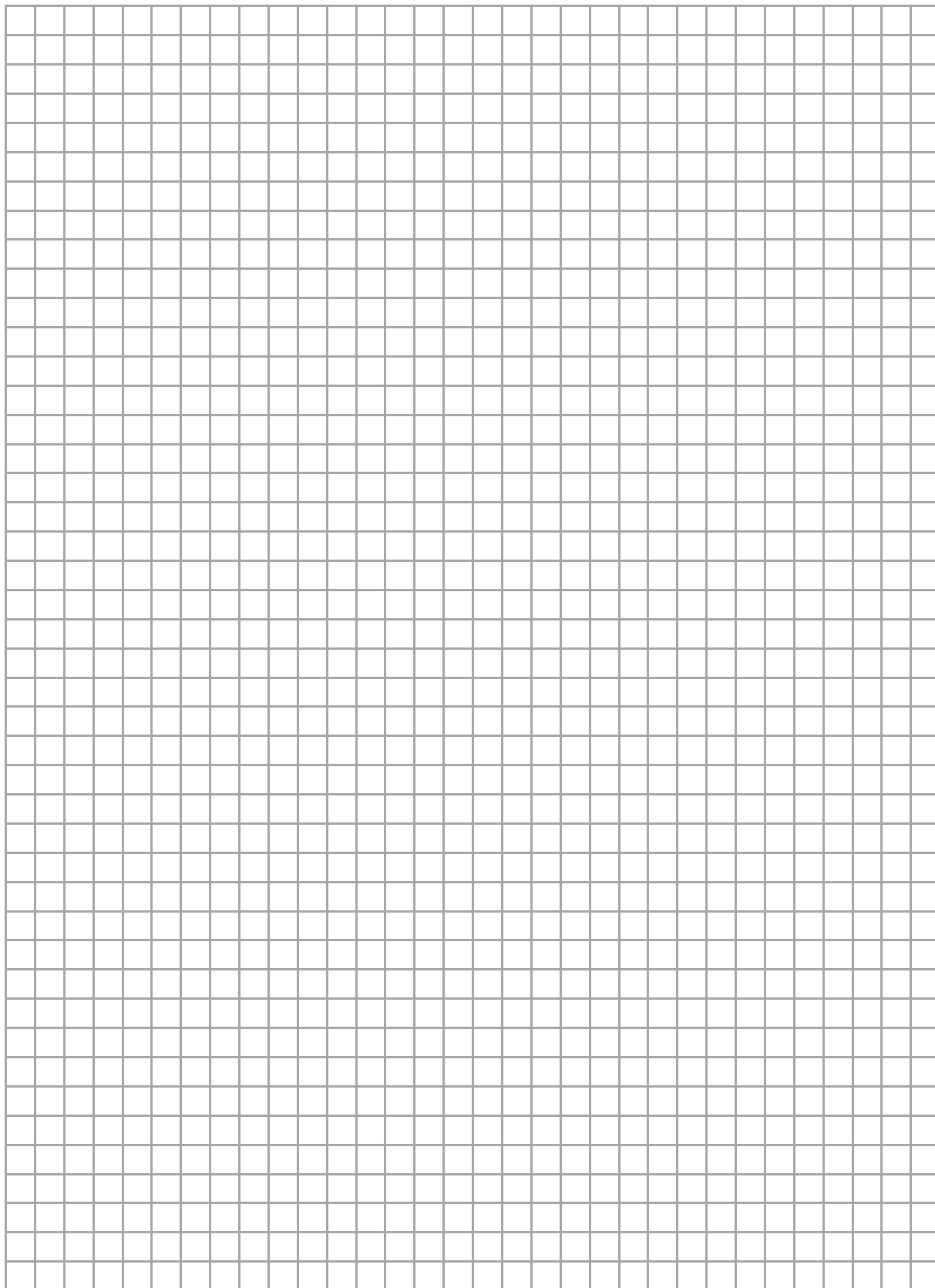
$$(x - 3)(x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m) = 0$$

ma dokładnie dwa rozwiązania.



Zadanie 13. (0–5)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^3+k}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.
Oblicz wartość k , dla której prosta o równaniu $y = -x$ jest styczna do wykresu funkcji f .

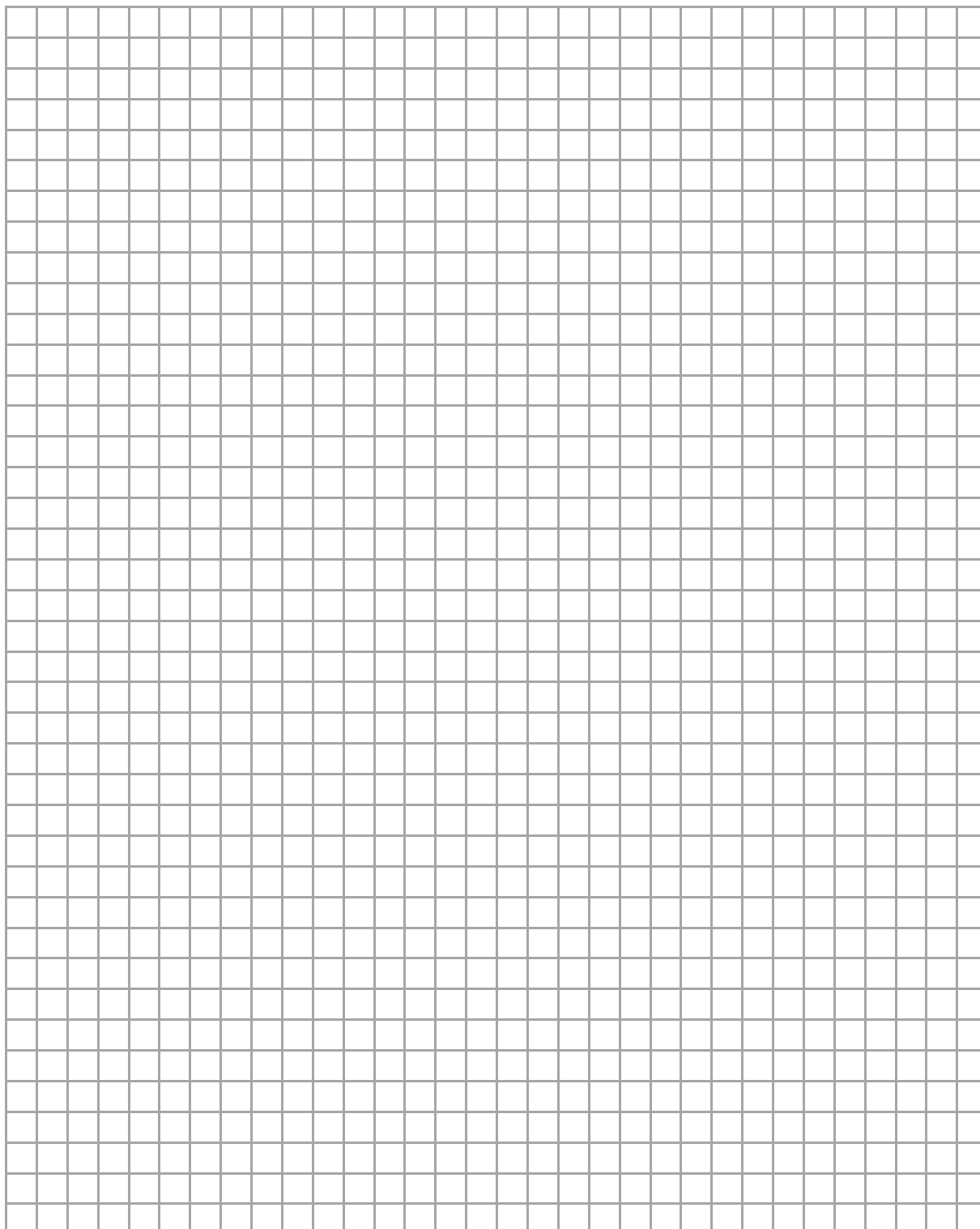


Zadanie 14. (0–5)

Na okręgu jest opisany czworokąt $ABCD$. Bok AD tego czworokąta jest dwa razy dłuższy od boku AB , a przekątna BD ma długość równą 6. Ponadto spełnione są następujące warunki:

$$\cos(\sphericalangle ADB) = \frac{7}{8}, \quad |\sphericalangle BCD| = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad |AB| > \sqrt{15}.$$

Oblicz długość boku BC tego czworokąta.



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty prostokątne ABC o przeciwprostokątnej AB i obwodzie równym 4. Niech $x = |AC|$.

a) Wykaż, że pole P trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{x(4 - 2x)}{4 - x}$$

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P .

c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

