

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ jest podzielny bez reszty przez wielomian

- A. $x + 2$ B. $x + 1$ C. $x - 1$ D. $x - 2$

Zadanie 2. (0–1)

Granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} - x \right)$ jest równa

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 0 D. -2

Zadanie 3. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x .

Pochodna f' tej funkcji jest określona wzorem

- A. $f'(x) = \frac{3}{2x}$
B. $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{2x}$
C. $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 1)^2}$
D. $f'(x) = \frac{9x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)^2}$

Zadanie 4. (0–1)

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$ jest równe

- A. $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$ B. $\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{6}$

Zadanie 5. (0–2)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. Oblicz iloraz ciągu (a_n) .

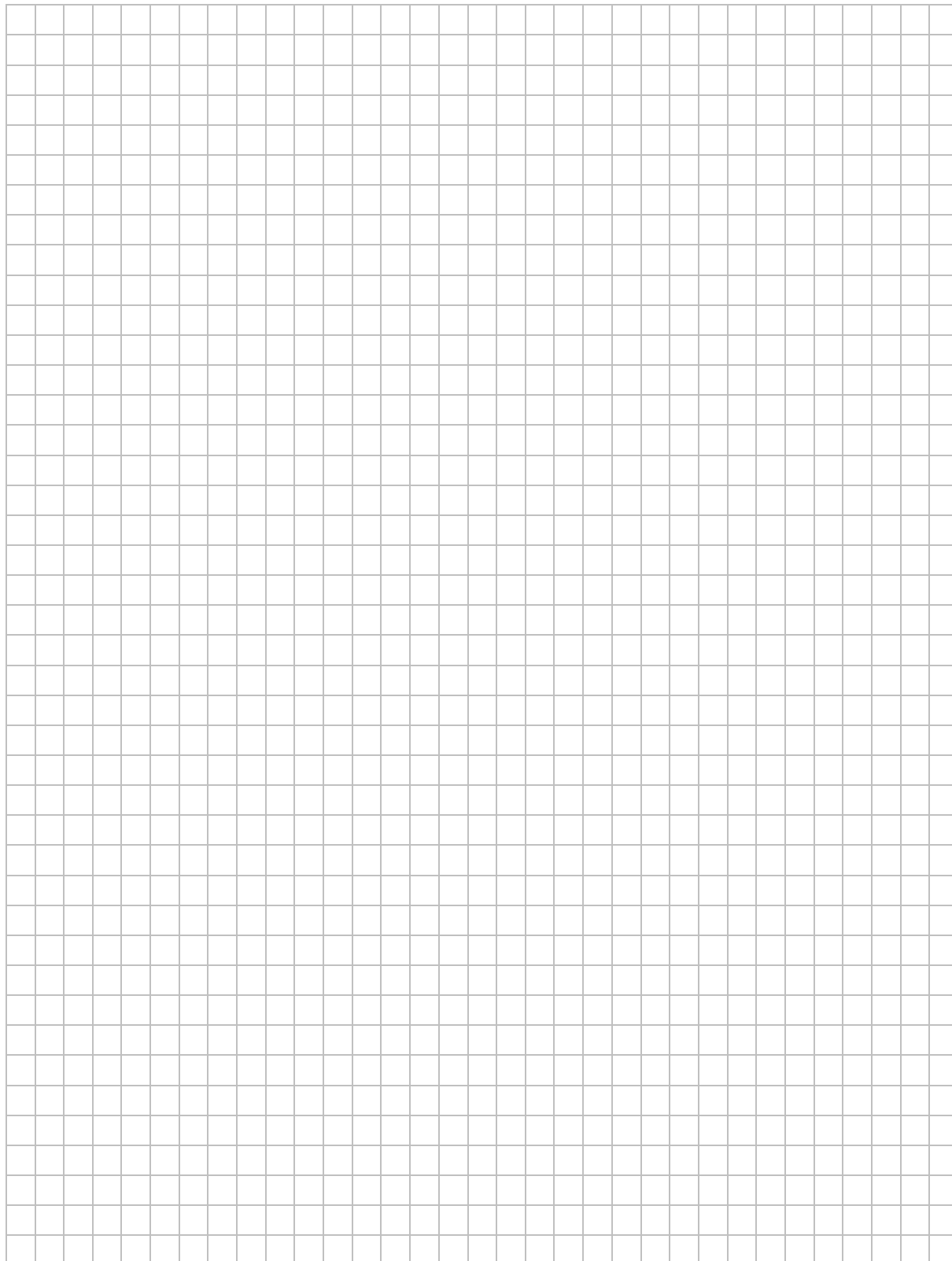
W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.

--	--	--

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form a uniform pattern of small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 6. (0–3)

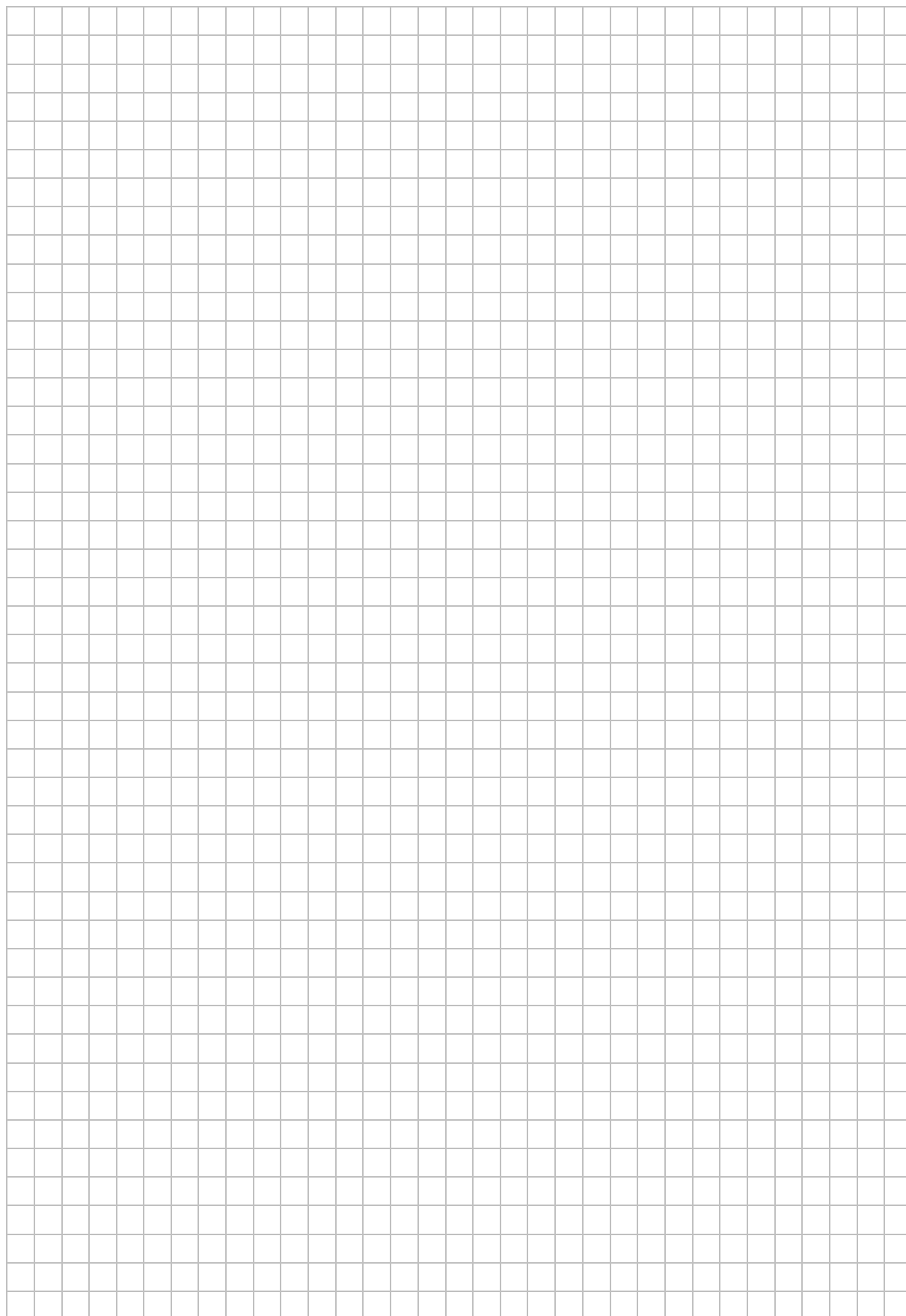
Pierwszy wyraz ciągu (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$.



Odpowiedź:

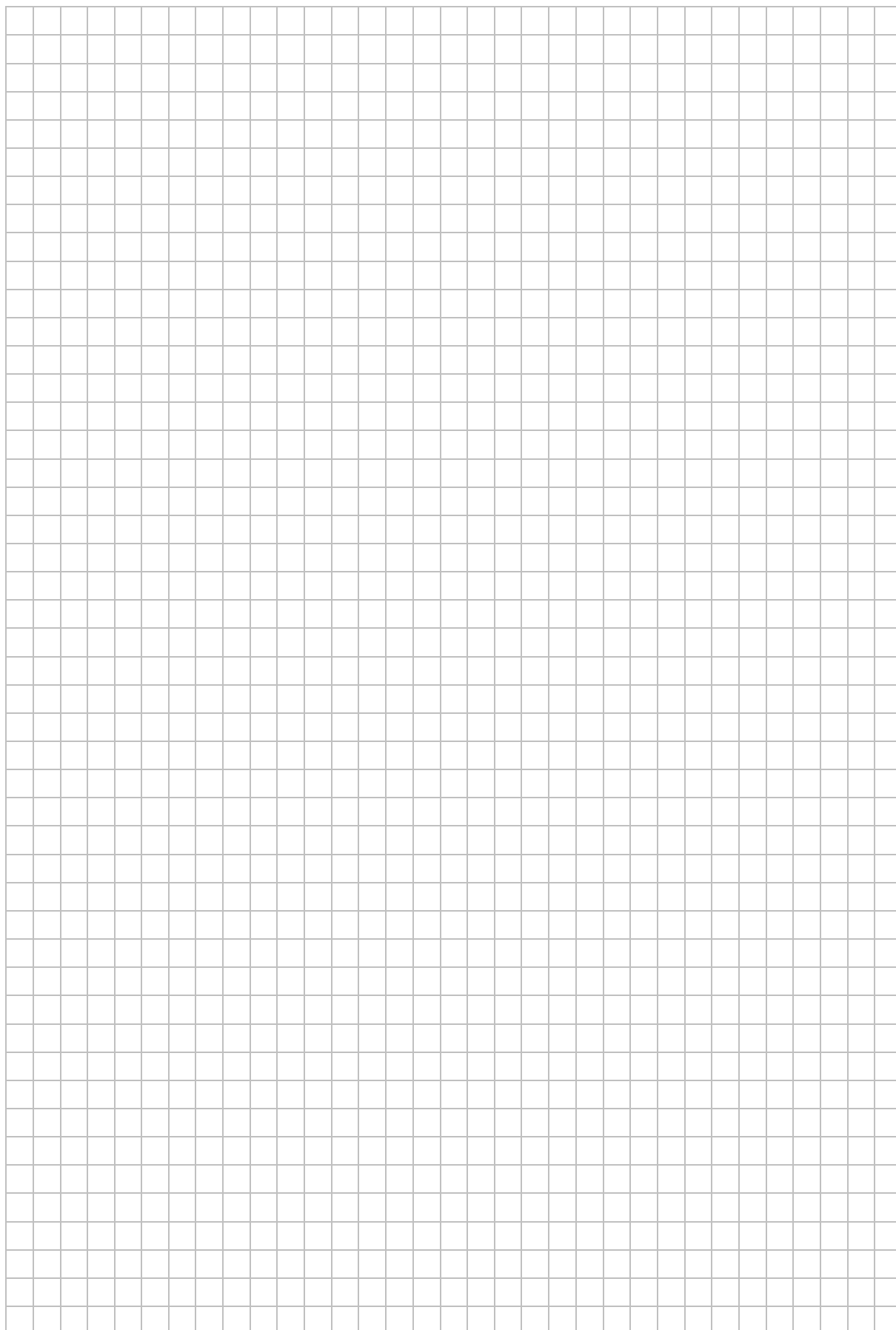
Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty A , B , C i D . Wykaż, że jeżeli $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$.



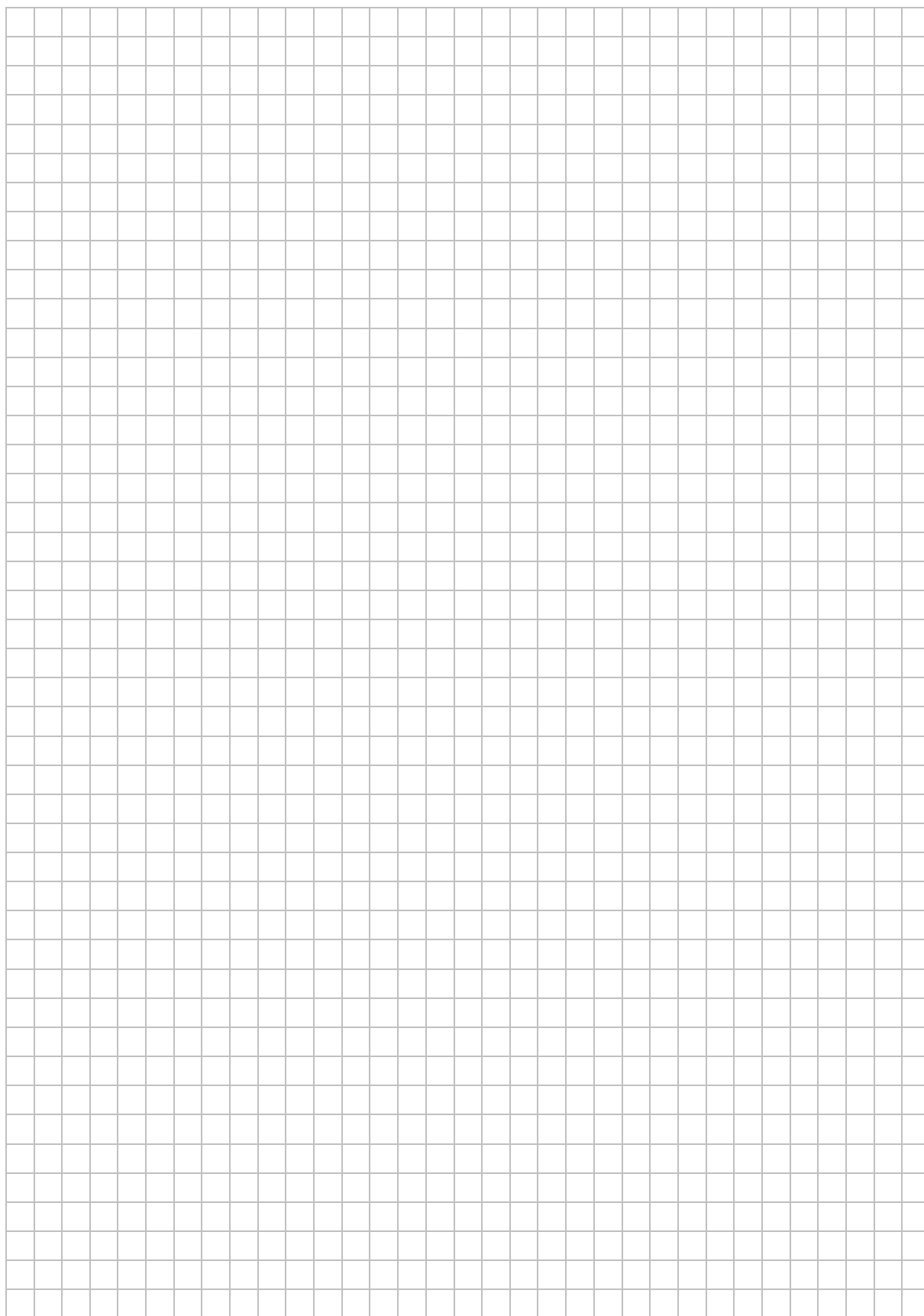
Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.



Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie $4\sin^3 x + \sin 2x = 2\sin^2 x \cdot (2\cos x + 1)$.



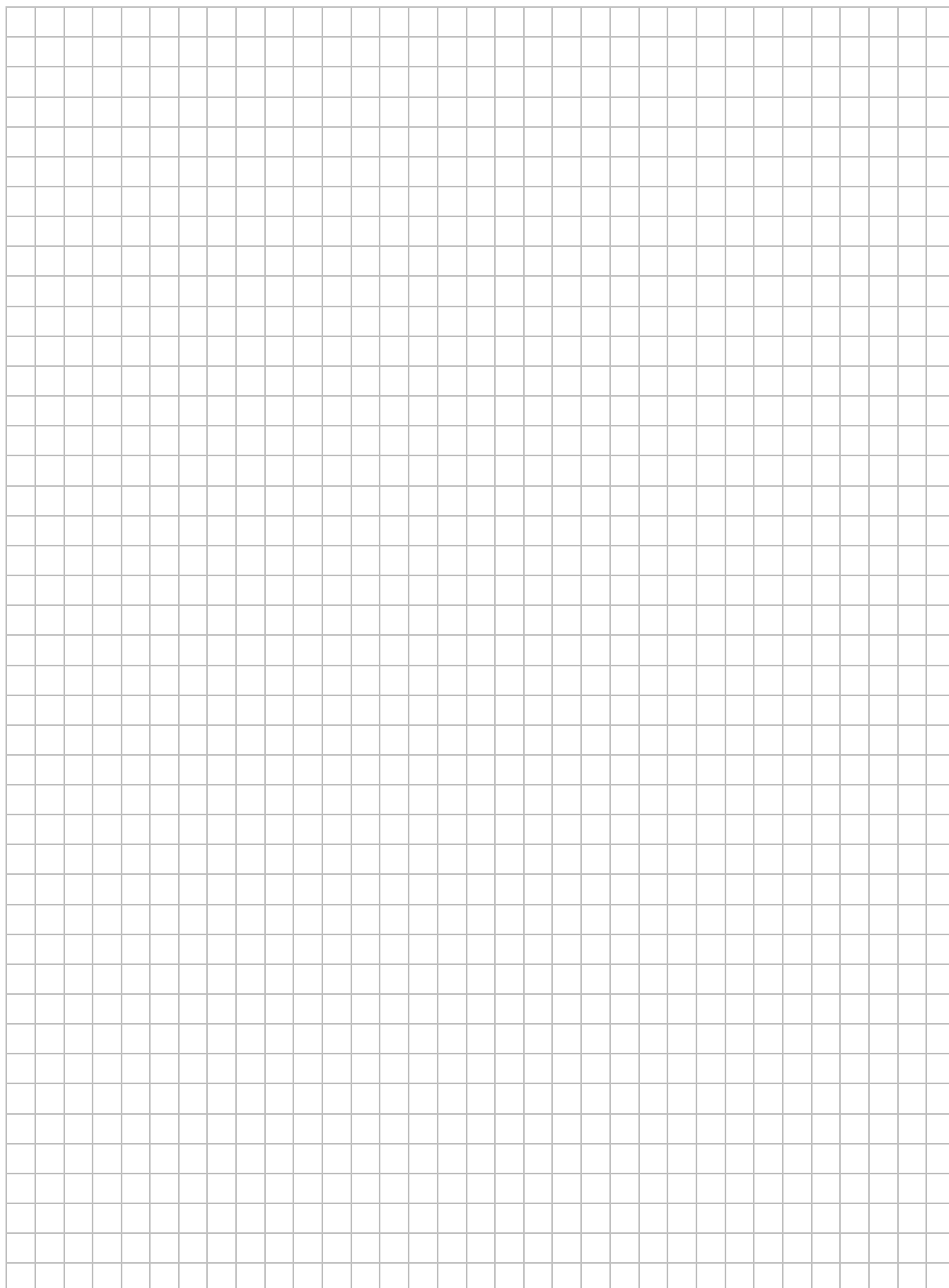
Odpowiedź:

Zadanie 10. (0–4)

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$ i $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

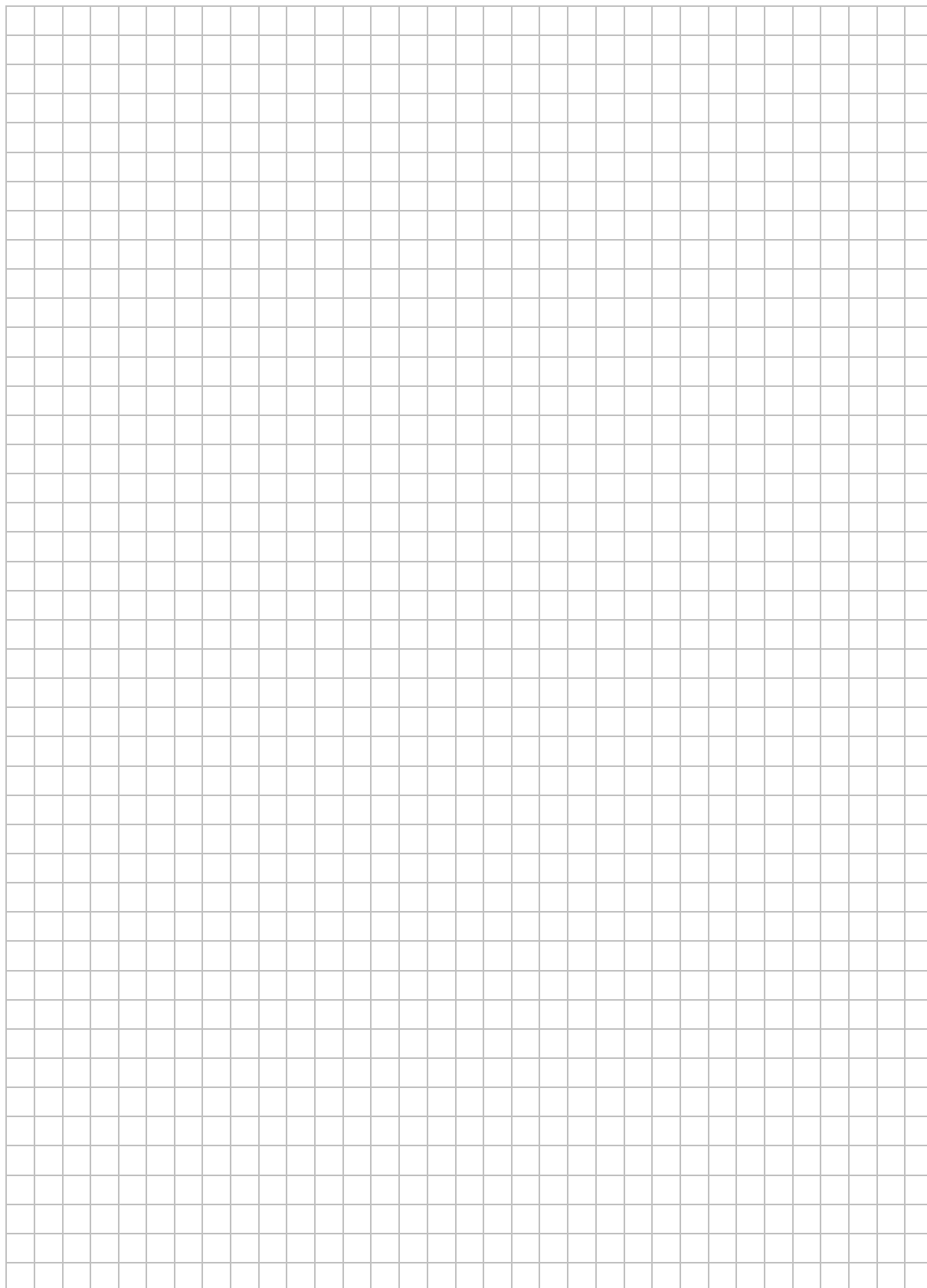


Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność

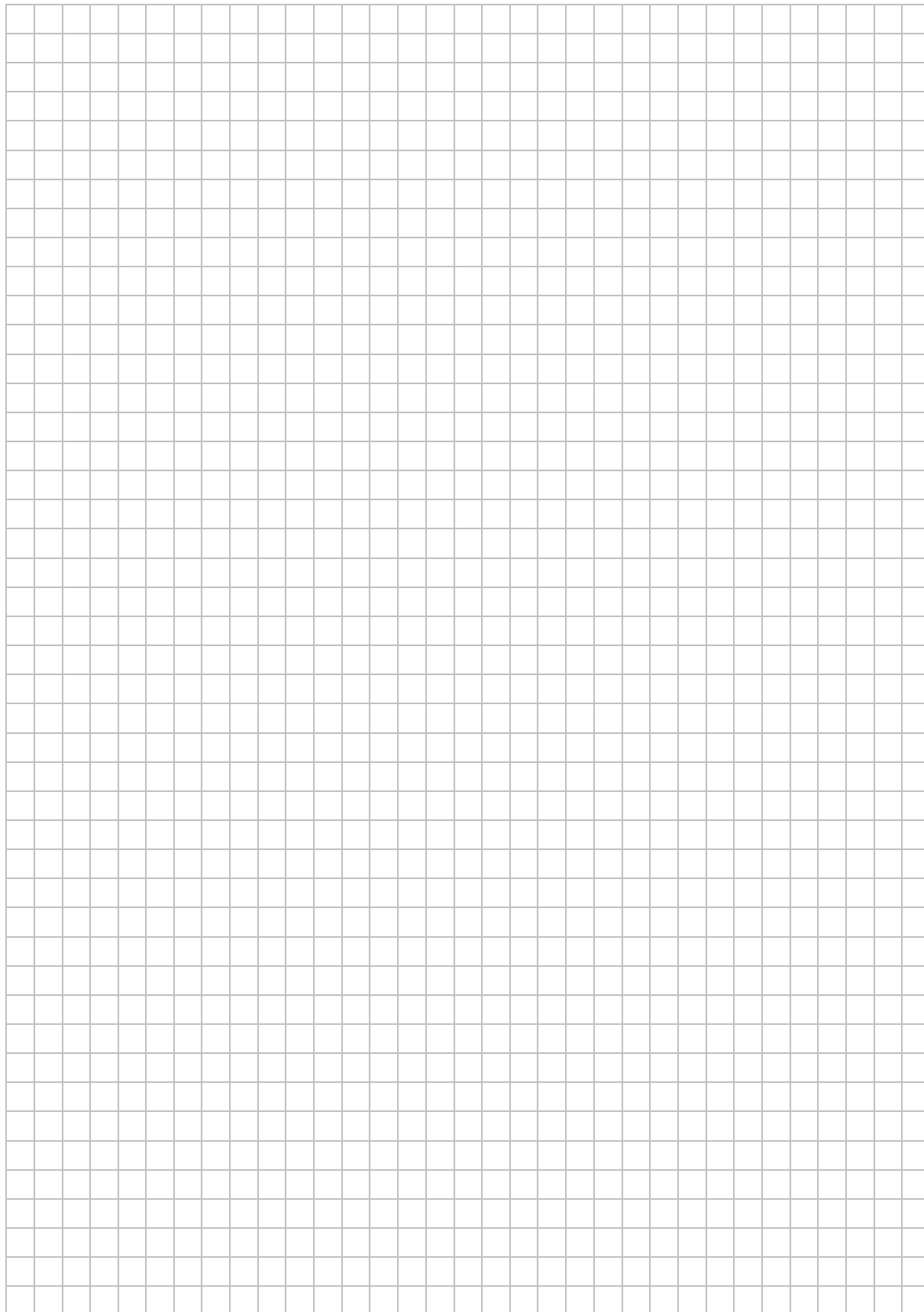
$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x > 2mx - 2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .



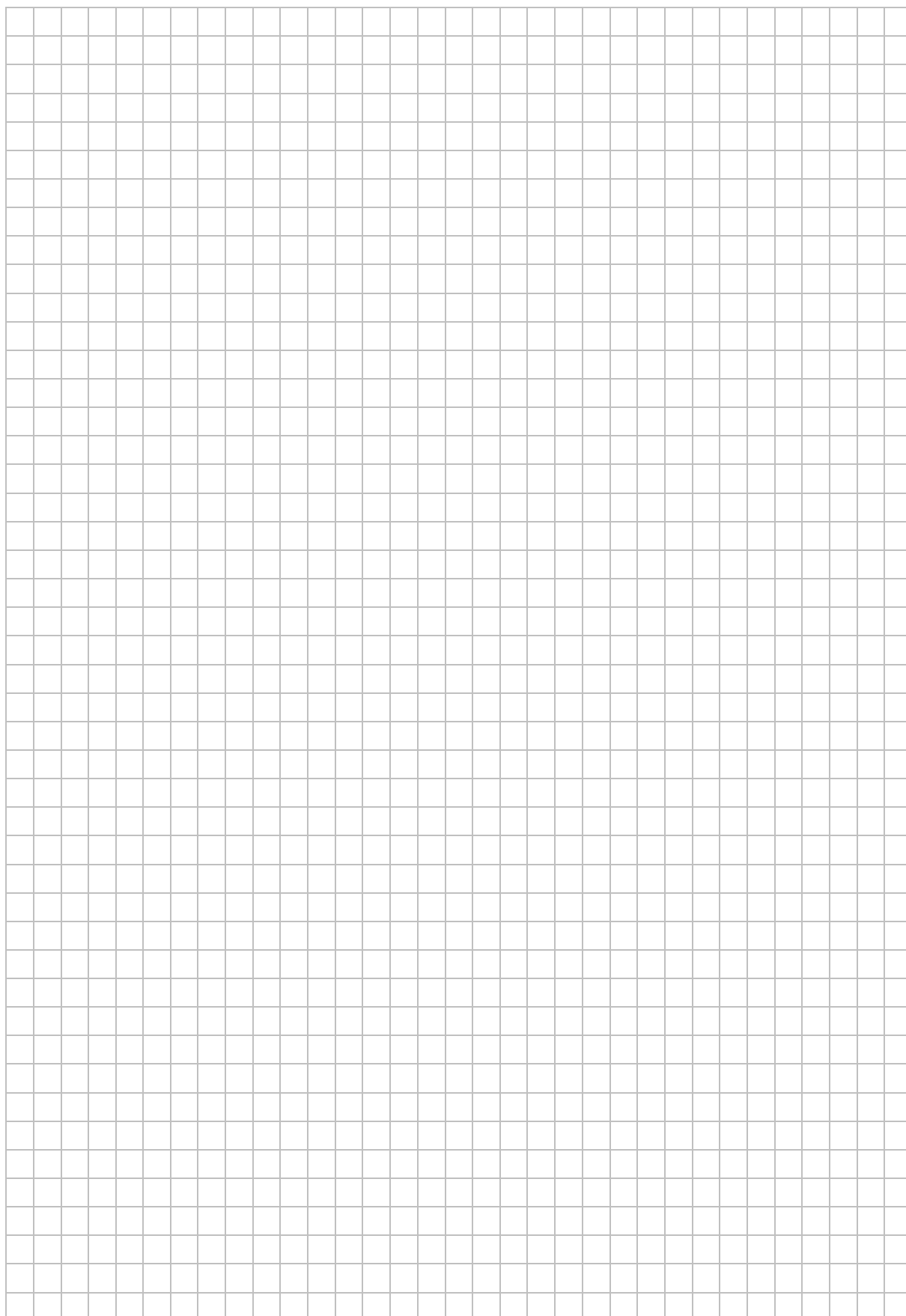
Zadanie 12. (0–6)

Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym $82,5$. Przekątna BD tego rombu zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.



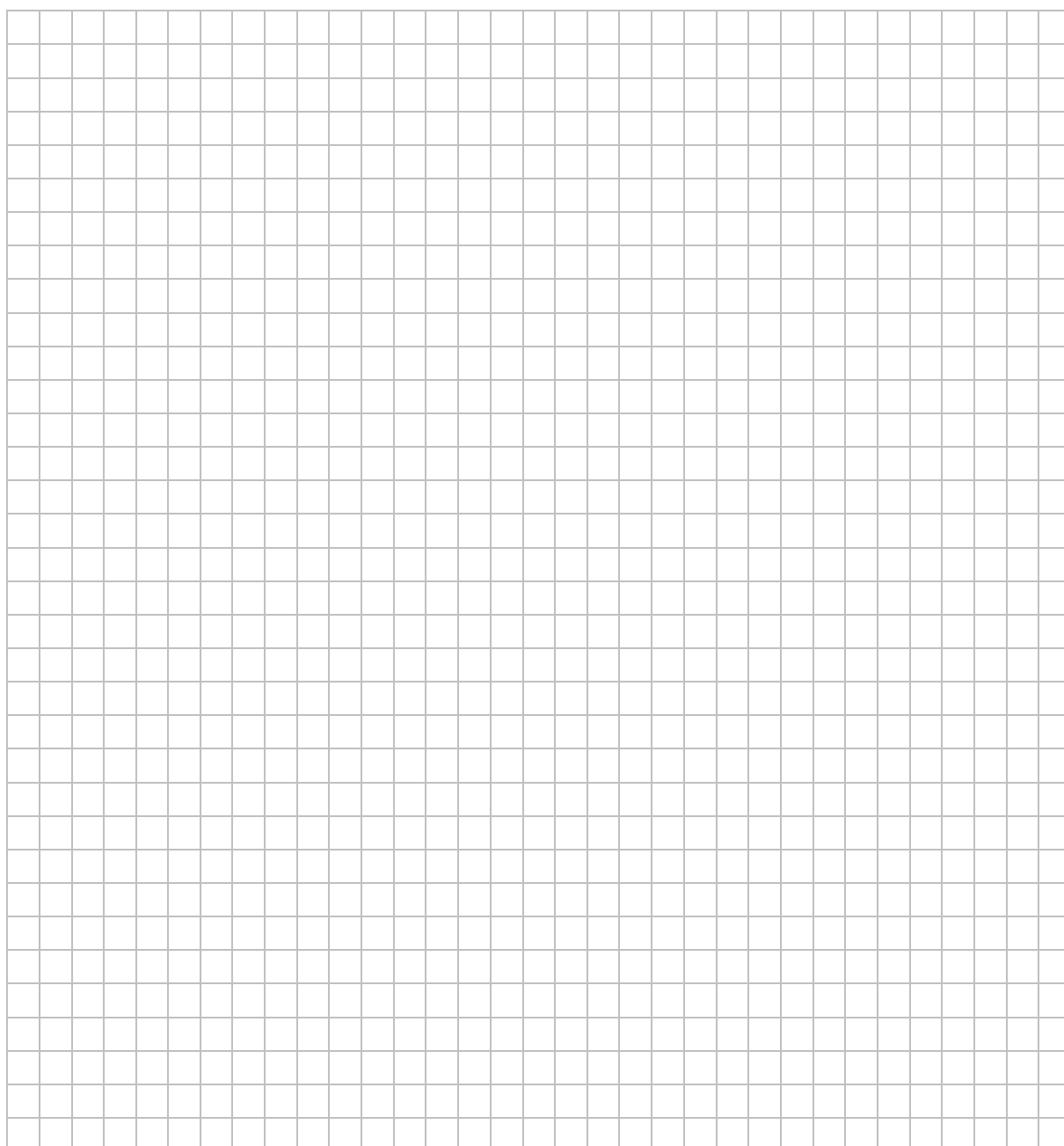
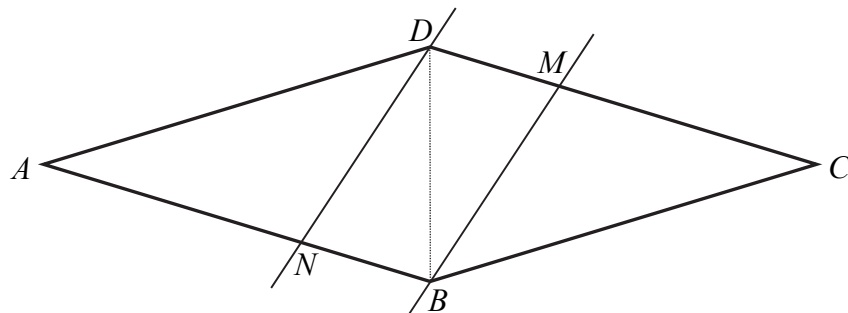
Zadanie 13. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

A large grid of graph paper, consisting of 28 columns and 30 rows of small squares, intended for calculations or writing.

Zadanie 14. (0–6)

Dany jest romb $ABCD$. Przez wierzchołki B i D poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki CD i AB – odpowiednio – w punktach M i N , tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury AND , $NBMD$, BCM o równych polach. Ponadto wiadomo, że $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa d . Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę największą objętość.

