

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2019/2020**

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1A1P-203

CZERWIEC 2020

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeniach o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Numer zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	D	C	C	B

Klucz punktowania zadań kodowanych

Zadanie 5. (0–2)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. Oblicz iloraz ciągu (a_n) .

W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.

--	--	--

Przykładowe rozwiązanie

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 2, zatem $\frac{a_1}{1-q} = 2$.

Suma kwadratów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 3, a zatem $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$.

Stąd wynika, że $7q^2 - 8q + 1 = 0$.

Rozwiązaniami równania są $q = \frac{1}{7}$ lub $q = 1$.

Rozwiązanie $q = 1$ jest sprzeczne, ponieważ nie spełnia warunku zbieżności nieskończonego ciągu geometrycznego $|q| < 1$. Zatem $q = \frac{1}{7} = 0,142857$.

Zad 5.

0	1	4
---	---	---

Zadanie 6. (0–3)

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy kolejno wyrazy;

dla $n = 1$ otrzymujemy: $a_1 = 3 \cdot a_2 + 1$, czyli $a_2 = \frac{1}{3}$,

dla $n = 2$ otrzymujemy: $a_2 = 3 \cdot a_3 + 4$, czyli $a_3 = -\frac{11}{9}$.

Stąd $a_1 + a_2 + a_3 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \frac{10}{9}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy obliczy drugi wyraz ciągu (a_n) : $a_2 = \frac{1}{3}$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy trzeci wyraz ciągu (a_n) : $a_3 = -\frac{11}{9}$

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy obliczy sumę $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{10}{9}$.

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty A , B , C i D . Wykaż, że jeżeli $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$.

Przykładowe sposoby rozwiązania zadania

I sposób

Niech $a = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, r_1 – promień okręgu opisanego na trójkącie ACB ,
 r_2 – promień okręgu opisanego na trójkącie ADB .

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ACB i dla trójkąta ADB wynika, że

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ADB} = 2r_2,$$

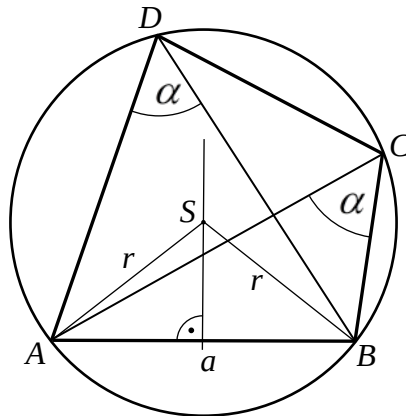
czyli

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{a}{\sin \alpha} = 2r_2.$$

Stąd wynika, że $r_1 = r_2$.

Ponieważ odcinek AB jest wspólnym bokiem trójkątów ACB i ADB , więc środki okręgów opisanych na tych trójkątach leżą na symetralnej tego boku. Z faktu, że czworokąt $ABCD$ jest wypukły, wynika natomiast, że punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB .

Stąd i z równości $r_1 = r_2$ wynika, że środki obu tych okręgów pokrywają się, co oznacza, że okrąg opisany na trójkącie ACB jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ADB .



Jest to więc okrąg opisany na czworokącie $ABCD$. Kąty BAC i BDC są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku BC . To kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający wykaże, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ACB i ADB są równe.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający uzasadni, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Uwaga

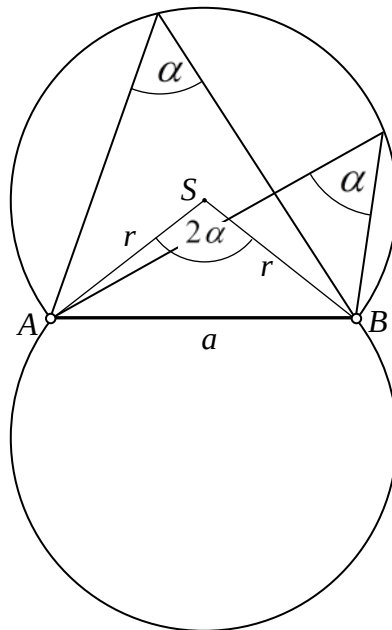
Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ACB i ADB są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach ACB i ADB pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający uzasadni, że kąty BAC i BDC są równe.

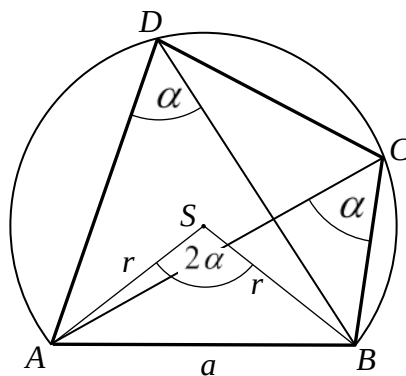
II sposób

Miejszem geometrycznym punktów, z których odcinek AB widać pod tym samym kątem $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, jest suma łuków (bez końców) $\widehat{AB}$ okręgów, których ten odcinek jest wspólną cięciwą, przy czym łuk leżący po jednej stronie prostej AB jest symetryczny do łuku leżącego po drugiej stronie tej prostej.



Wierzchołki C i D czworokąta $ABCD$ leżą na jednym z tych łuków, gdyż czworokąt ten jest wypukły.

Oznacza to, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



Kąty BAC i BDC są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku BC . To kończy dowód.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający uzasadni, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, odwołując się do miejsca geometrycznego punktów, z których odcinek AB widać pod tym samym kątem

$$\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|.$$

Uwaga

Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ACB i ADB są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach ACB i ADB pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający uzasadni, że kąty BAC i BDC są równe .

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ równoważnie w następujący sposób

$$n^4 \cdot (n - 3) - (n - 3)$$

$$(n^4 - 1) \cdot (n - 3)$$

$$(n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3)$$

$$(n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3)$$

Liczba n jest nieparzysta więc liczby $(n - 1)$, $(n + 1)$, $(n^2 + 1)$, $(n - 3)$ są parzyste zatem ich iloczyn jest podzielny przez 2^4 . Wyrażenie jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16 więc jest podzielne przez 16.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $(n^4 - 1) \cdot (n - 3) + 16$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3) + 16$ i nie uzasadni podzielności przez 16.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)

Ponieważ liczba n jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ przyjmuje postać:

$$(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 3.$$

Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy

$$32n^5 + 32n^4 - 16n^3 - 32n^2 - 16n + 16,$$

stąd wyrażenie możemy zapisać w postaci iloczynu $16(2n^5 + 2n^4 - n^3 - 2n^2 - n + 1)$, który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby $(2n^5 + 2n^4 - n^3 - 2n^2 - n + 1)$ jest podzielny przez 16.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie $(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 19$ i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażen.

$$(2k+1)^5 = 32n^5 + 80n^4 + 80n^3 + 40n^2 + 10n + 1 \text{ lub}$$

$$(2k+1)^4 = 16n^4 + 32n^3 + 24n^2 + 8n + 1.$$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy doprowadzi wyrażenie do postaci $32n^5 + 32n^4 - 16n^3 - 32n^2 - 16n + 16$ i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie $4\sin^3 x + \sin 2x = 2\sin^2 x \cdot (2\cos x + 1)$.

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x + 2\sin x \cos x = 4\sin^2 x \cos x + 2\sin^2 x$$

$$4\sin^3 x + 2\sin x \cos x - 4\sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin x (2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x \cos x - \sin x) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin x (\sin x - \cos x) + \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } (\sin x - \cos x)(2\sin x - 1) = 0$$

Zatem

$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = \cos x \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że drugie równanie tej alternatywy jest równoważne równaniu $\tan x = 1$.

Gdyby zachodziło $\cos x = 0$, to otrzymalibyśmy równość $\sin x = 0$, a to byłoby sprzeczne z tożsamością $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ostatecznie zapisujemy cztery serie rozwiązań podanego równania:

$$x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ oznacza liczbę całkowitą.}$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania

.....1p.
Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2 \sin x (2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny

postępowanie.....2p.

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu

$$(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x)(2 \sin x - 1) = 0 \text{ lub } (2 \sin^2 x - \sin 2x)(2 \sin x - 1) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności

zadania.....3p.

Zdający poprawnie rozwiąże dwa spośród trzech równań:

$$\sin x = 0, \quad 2 \sin x - 1 = 0, \quad \sin x - \cos x = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie

pełne.....4p.

Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:

$$x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \text{ oznacza liczbę}$$

całkowitą.

Rozwiązanie (II sposób)

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos x = 4 \sin^2 x \cos x + 2 \sin^2 x$$

$$4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin x (2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

Równanie $2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$ zapisujemy w postaci

$$2 \sin^2 x - (2 \cos x + 1) \sin x + \cos x = 0$$

i rozwiązujemy je tak samo jak równanie kwadratowe z niewiadomą $\sin x$ i parametrem $\cos x$.

Otrzymujemy wtedy wyróżnik $\Delta = (2 \cos x - 1)^2$ oraz dwa rozwiązania:

$$\sin x = \frac{2 \cos x + 1 - |2 \cos x - 1|}{4} \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{2 \cos x + 1 + |2 \cos x - 1|}{4}$$

Jeśli $\cos x \geq \frac{1}{2}$, to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$. Zatem w tym przypadku

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$. W tym przypadku

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

Ostatecznie możemy zapisać cztery serie rozwiązań podanego równania:

$$x = k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ oznacza liczbę całkowitą.}$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania

.....1p.

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2 \sin x (2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny

postęp..... 2p.

Zdający zapisze równanie $2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$ w postaci

$$2 \sin^2 x - (2 \cos x + 1) \sin x + \cos x = 0,$$

obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego z lewej strony równania $\Delta = (2 \cos x - 1)^2$ i zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\sin x = \frac{2 \cos x + 1 - |2 \cos x - 1|}{4} \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{2 \cos x + 1 + |2 \cos x - 1|}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności

zadania.....3p.

Zdający rozpatrzy poprawnie jeden z przypadków:

- jeśli $\cos x \geq \frac{1}{2}$, to $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$.

Zatem w tym przypadku $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

albo

- jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.

Zatem w tym przypadku $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie

pełne.....4p.

Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:

$$x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \text{ oznacza liczbę}$$

całkowitą.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **lub** przez $(2 \sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2 \sin x - 1 = 0$, to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **i** przez $(2 \sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2 \sin x - 1 = 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniach nie uwzględni okresowości funkcji trygonometrycznych i zapisuje przykładowe rozwiązania z każdej serii, np. $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu fałszywe równości, np. $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**, o ile wcześniej nie nabył praw do **3 punktów**.
5. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu równość $\sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x$, bez odpowiedniego komentarza, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podczas doprowadzania równania do postaci iloczynu stosuje nieistniejące „wzory” skróconego mnożenia, np.

$$(a - b - c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ lub } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2),$$

to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile wcześniej nie nabył praw do **1 punktu**.

Zadanie 10. (0–4)

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$ i $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy jednakową podstawę a dla logarytmów i otrzymujemy:

$$\frac{20 \log_a N}{\log_a (a^2b)} = 3 \left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b} \right)$$

Ponieważ $\log_a N \neq 0$, więc powyższa równość jest równoważna równości

$$\frac{20}{2 + \log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

Zapisujemy zatem kolejno:

$$\begin{aligned} 20 \log_a b &= 3 \log_a b (2 + \log_a b) + 3(2 + \log_a b) \\ 3(\log_a b)^2 - 11 \log_a b + 6 &= 0. \end{aligned}$$

To równanie ma dwa rozwiązania $\log_a b = 3$ lub $\log_a b = \frac{2}{3}$, będące poszukiwanymi wartościami wyrażenia $\log_a b$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania

.....1p.

Zdający zapisze podaną równość w postaci $\frac{20 \log_a N}{\log_a (a^2b)} = 3 \left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b} \right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp

.....2p.

Zdający zapisze równanie wymierne z niewiadomą $\log_a b$.

$$\frac{20}{2 + \log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności

zadania.....3p.

Zdający przekształci powyższe równanie do postaci równania kwadratowego, np.

$$20 \log_a b = 3 \log_a b (2 + \log_a b) + 3(2 + \log_a b)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie

pełne.....4p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie i zapisze, że szukane wyrażenie przyjmuje dwie wartości:

$$\log_a b = 3 \text{ lub } \log_a b = \frac{2}{3}.$$

Uwagi:

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $\log_b a = \frac{3}{2}$ lub $\log_b a = \frac{1}{3}$.
2. Jeśli zdający pominie kwadrat w wyrażeniu $\log_{a^2b} N$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, otrzymując odpowiedź: $\log_a b = \frac{19}{3}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający korzysta w rozwiązaniu z fałszywych równości, np. $\log_{a^2b} N = \frac{1}{2} \log_{ab} N$, to otrzymuje **0 punktów**, chyba że wcześniej nabył praw do 1 punktu.

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x > 2mx - 2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

Rozwiązanie

Zapiszemy nierówność w następującej postaci

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x(1 - m) + 2 > 0$$

Zauważamy, że $m^2 + 4m - 5 = (m - 1)(m + 5)$. Wynika stąd, że należy rozważyć dwie sytuacje:

- nierówność liniowa
 - 1) Jeśli $m = 1$, to otrzymujemy nierówność $2 > 0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .
 - 2) Jeśli $m = -5$, to otrzymujemy nierówność $12x + 2 > 0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x > -\frac{1}{6}$.
- nierówność kwadratowa
 - 3) Jeśli $m \neq 1$ i $m \neq -5$, to należy sprawdzić, kiedy zachodzą jednocześnie dwie nierówności:

$$a > 0 \text{ i } \Delta < 0,$$

gdzie $a = (m - 1)(m + 5)$ jest współczynnikiem trójmianu

$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x(1 - m) + 2$ przy najwyższej potędze zmiennej x , zaś

$\Delta = b^2 - 4ac$ jest wyróżnikiem tego trójmianu. Zapisujemy kolejno:

$$(m - 1)(m + 5) > 0 \Leftrightarrow m < -5 \text{ lub } m > 1.$$

$$\Delta = 4(1 - m)^2 - 4(m - 1)(m + 5) \cdot 2 = 4(m - 1)^2 - 8(m - 1)(m + 5) = -4(m - 1)(m + 11)$$

$$-4(m - 1)(m + 11) < 0 \Leftrightarrow m < -11 \text{ lub } m > 1.$$

Zatem nierówności $a > 0$ i $\Delta < 0$ zachodzą jednocześnie dla $m < -11$ lub $m > 1$.

Łącząc wyniki z punktów 1) i 3), otrzymujemy odpowiedź ostateczną: $m < -11$ lub $m \geq 1$.

Schemat punktowania

Składa się on z dwóch części.

Pierwsza, to rozpatrzenie przypadku nierówności liniowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

Druga, to rozpatrzenie przypadku nierówności kwadratowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Schemat punktowania części pierwszej

1 punkt przyznajemy zdającemu, który zauważy i zapisze, że dla $m = 1$ albo dla $m = -5$ podana nierówność jest liniowa i poprawnie zbada jeden z tych przypadków.

2 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie określi, że dla $m = 1$ nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x , zaś dla $m = -5$ tak nie jest.

Schemat punktowania części drugiej

1 punkt przyznajemy zdającemu, który zapisze, że nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x wtedy, gdy parametr m spełnia układ nierówności

$$m^2 + 4m - 5 > 0 \text{ i } \Delta < 0$$

albo

$$m^2 + 4m - 5 > 0 \text{ i } y_W > 0, \text{ gdzie } y_W = -\frac{\Delta}{4a}$$

2 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże jedną z dwóch nierówności

$$m^2 + 4m - 5 > 0, \text{ czyli } (m-1)(m+5) > 0 \Leftrightarrow m < -5 \text{ lub } m > 1$$

lub

$$\Delta = -4(m-1)(m+11) < 0$$

$$-4(m-1)(m+11) < 0 \Leftrightarrow m < -11 \text{ lub } m > 1$$

3 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże obie nierówności $a > 0$ i $\Delta < 0$

oraz

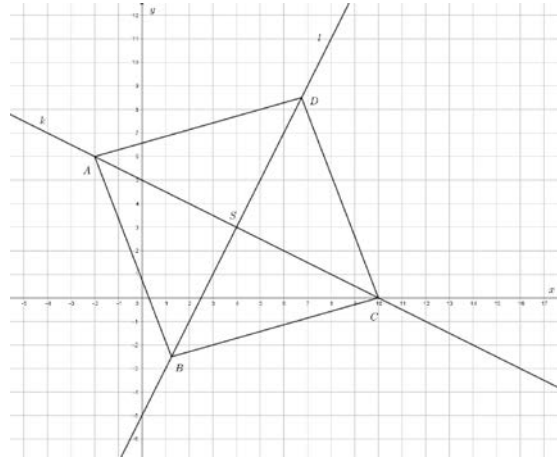
zapisze końcową odpowiedź do zadania: Dla $m < -11$ lub $m \geq 1$ podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

Uwagi:

1. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze jedynie nierówność $\Delta < 0$ i nawet bezbłędnie tę nierówność rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający zapisze w drugiej części rozwiązania układ nierówności $m^2 + 4m - 5 \neq 0$ i $\Delta < 0$, a następnie konsekwentnie rozwiąże ten układ do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
3. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze układ nierówności $m^2 + 4m - 5 > 0$ i $\Delta > 0$, a następnie nawet bezbłędnie ten układ rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
Jeśli zdający zapisze w części drugiej rozwiązania układ nierówności $m^2 + 4m - 5 > 0$ i $\Delta \leq 0$, i konsekwentnie rozwiąże tę część do końca, to za tę część może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

Zadanie 12. (0–6)

Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 82,5. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.



Rozwiązanie (I sposób)

Wyznaczamy równanie prostej k zawierającej przekątną AC rombu (prosta k jest prostopadła do prostej l , punkt A leży na prostej k).

$$k : y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Z układu równań
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$$
 wyznaczamy współrzędne punktu $S = (4, 3)$ (środek

symetrii rombu). Punkt S jest jednocześnie środkiem przekątnej AC , co pozwala obliczyć współrzędne wierzchołka $C = (10, 0)$.

Obliczamy długość przekątnej $|AC| = 6\sqrt{5}$, a następnie, wykorzystując informację o polu rombu, obliczamy długość drugiej przekątnej.

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = 82,5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BD| = 82,5$$

$$|BD| = \frac{11}{2}\sqrt{5}$$

Punkty B oraz D leżą na okręgu o środku $S = (4, 3)$ i promieniu $\frac{1}{2}|BD| = \frac{11}{4}\sqrt{5}$ oraz na prostej l . Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = \frac{121}{16} \cdot 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Otrzymujemy punkty $B = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$ oraz $D = \left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right)$.

Uwaga

Długość odcinka AS można obliczyć również jako odległość punktu A od prostej l .

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- wyznaczy równanie prostej

$$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

albo

- wyznaczy $|AS| = 3\sqrt{5}$, jako odległość punktu A od prostej l .

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy

- wyznaczy równanie prostej $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$ oraz obliczy współrzędne punktów

$$S = (4, 3) \text{ oraz } C = (10, 0)$$

albo

- wyznaczy $|AS| = 3\sqrt{5}$, jako odległość punktu A od prostej l oraz obliczy długości przekątnych $|AC| = 6\sqrt{5}$ oraz $|BD| = \frac{11}{2}\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy wyznaczy równanie prostej $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$ oraz obliczy współrzędne punktów

$$S = (4, 3) \text{ oraz } C = (10, 0) \text{ i długość przekątnej } |BD| = \frac{11}{2}\sqrt{5}.$$

Zdający otrzymuje 4 p.

gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów B oraz D ,

np.
$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = \frac{121}{16} \cdot 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje 5 p.

gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje 6 p.

gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$$B = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right), C = (10, 0), D = \left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right).$$

Rozwiązanie (II sposób)

Wyznaczamy równanie prostej $k : y = -\frac{1}{2}x + 5$ oraz obliczamy współrzędne punktu

$C = (10, 0)$ (jak w sposobie I). Zauważamy, że pole trójkąta ABC jest połową pola rombu $ABCD$ i wynosi $41\frac{1}{4}$. Wyznaczamy pole trójkąta ABC w zależności od współrzędnych punktu

$$B = (x_B, y_B)$$

$$P_{\triangle ABC} = |-6y_B - 3x_B + 30|$$

Punkt B leży na prostej l , więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4} \\ y_B = 2x_B - 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$ oraz $\left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right)$. Zauważamy, że takie

same warunki spełnia punkt D (pole trójkąta ABD jest połową pola rombu oraz punkt D leży na prostej l). Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków B oraz D .

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy wyznaczy równanie prostej

$$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy

wyznaczy równanie prostej $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$ oraz obliczy współrzędne punktów $S = (4, 3)$

i $C = (10, 0)$.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy zauważy, że pole trójkąta ABC jest połową pola rombu $ABCD$ i wynosi $41\frac{1}{4}$ i zapisze

$$\text{równanie } |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4}$$

Zdający otrzymuje 4 p.

gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów B oraz D

$$\begin{cases} |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4} \\ y_B = 2x_B - 5 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje 5 p.

gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje 6 p.

gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$$B = \left(1\frac{1}{4}, -2\frac{1}{2}\right), C = (10, 0), D = \left(6\frac{3}{4}, 8\frac{1}{2}\right).$$

Rozwiązanie (III sposób)

Przyjmijmy oznaczenie współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$. Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AC} = [x_C + 2, y_C - 6]$.

Wektor $\overrightarrow{AC}$ jest prostopadły do prostej $2x - y - 5 = 0$ Istnieje zatem $p \in \mathbb{R}$, dla którego

$$\overrightarrow{AC} = [2p, -p]$$

Obliczamy długość wektora $\overrightarrow{AC}$ jako podwojoną odległość punktu A od prostej l .

$$|\overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{5}$$

Wtedy $\sqrt{(2p)^2 + (-p)^2} = 6\sqrt{5}$ stąd $p = 6$ lub $p = -6$.

Zatem

$$[x_C + 2, y_C - 6] = [12, -6] \text{ lub } [x_C + 2, y_C - 6] = [-12, 6]$$

$$C_1 = (10, 0), \quad C_2 = (-14, 12)$$

Odrzucamy drugie rozwiązanie (np. na podstawie obserwacji, że środek odcinka AC_2 nie leży na prostej l . Dalej postępujemy, jak w I lub II sposobie.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze $\overrightarrow{AC} = [2p, -p]$, $\overrightarrow{AC} = [x_c + 2, y_c - 6]$ oraz obliczy $\overrightarrow{AC} = 6\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy rozwiąże równanie $\sqrt{(2p)^2 + (-p)^2} = 6\sqrt{5}$, wyznaczy współrzędne punktu

$C_1 = (10, 0)$ i uzasadni odrzucenie drugiego rozwiązania.

Dalszą część rozwiązania oceniamy jak w sposobie I lub II.

Zadanie 13. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

Rozwiązanie

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka.

Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki.

Stosujemy regułę mnożenia: $7 \cdot 6 \cdot 1 = 42$.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki.

Stosujemy kolejny raz regułę mnożenia: $7 \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$.

Teraz stosujemy regułę dodawania: $42 + 105 = 147$.

Jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Zdający otrzymuje 2 p.

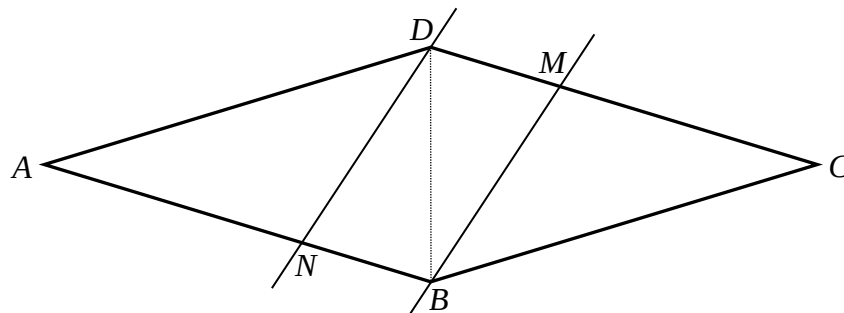
gdy obliczy ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka lub zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka: odpowiednio 42 i 105.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Zadanie 14. (0–6)

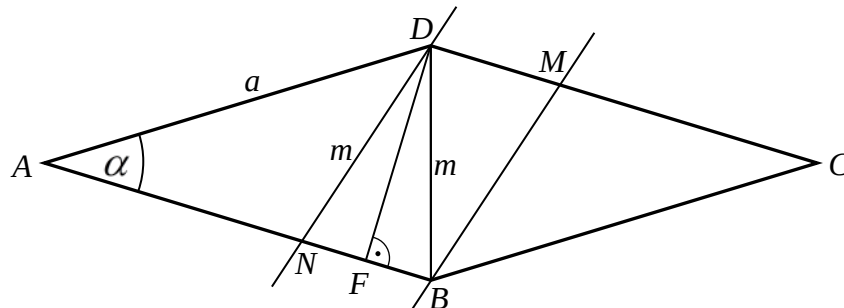
Dany jest romb $ABCD$. Przez wierzchołki B i D poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki CD i AB – odpowiednio – w punktach M i N , tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury AND , $NBMD$, BCM o równych polach oraz $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.



Przykładowe sposoby rozwiązania zadania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli romb $ABCD$ na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta AND , więc pole trójkąta AND jest dwa razy większe od pola trójkąta BDN . Trójkąty AND i BDN mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka D , więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem $|NB| = \frac{a}{3}.$

Trójkąt NBD jest równoramienny, więc spodek F jego wysokości DF jest środkiem podstawy NB . Stąd wynika, że $|FB| = \frac{a}{6}$, więc $|AF| = a - \frac{a}{6} = \frac{5}{6}a$.

Z trójkąta prostokątnego AFD otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\frac{5}{6}a}{a} = \frac{5}{6}.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów AND i BDN jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej AB

albo

- zaznaczy wysokość DF trójkąta NBD i zapisze, że odcinki NF i FB są równe

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka AN (lub NB) w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD} = a^2 \sin \alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{2}ax \sin \alpha$

$$\text{ i } P_{AND} = \frac{1}{3}P_{ABCD}, \text{ gdzie } x = |AN|.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka AN (lub NB) w zależności od długości boku rombu:

$$|AN| = \frac{2}{3}a \quad (|NB| = \frac{1}{3}a).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka FB w zależności od długości boku rombu lub wykorzysta

definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym AFD : $|FB| = \frac{1}{6}a$ lub $\cos \alpha = \frac{|AF|}{|AD|}.$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka FB w zależności od długości boku rombu i wykorzysta

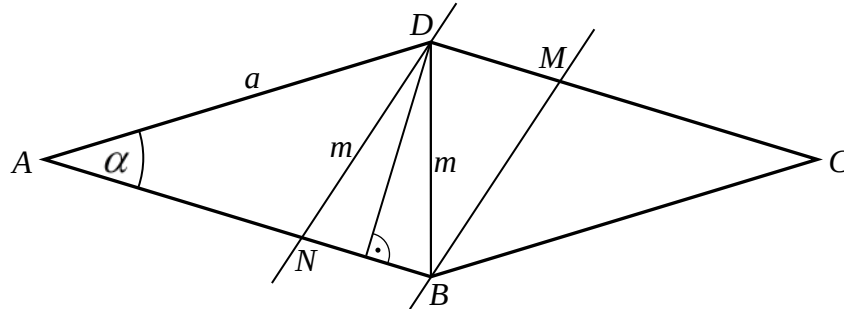
definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym AFD : $|FB| = \frac{1}{6}a$ i $\cos \alpha = \frac{|AF|}{|AD|}.$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt
Rozwiązanie pełne 6 pkt

Zdający obliczy $\cos \alpha$: $\cos \alpha = \frac{5}{6}$.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli romb $ABCD$ na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta AND , więc pole trójkąta AND jest dwa razy większe od pola trójkąta BDN . Trójkąty AND i BDN mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka D , więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem $|AN| = \frac{2}{3}a$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABD i AND otrzymujemy

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos \alpha \quad \text{oraz} \quad |ND|^2 = |AN|^2 + |AD|^2 - 2|AN| \cdot |AD| \cos \alpha,$$

czyli

$$m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha \quad \text{oraz} \quad m^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot a \cos \alpha,$$

$$m^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha) \quad \text{oraz} \quad m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right).$$

Stąd

$$a^2(2 - 2\cos \alpha) = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right),$$

$$2 - 2\cos \alpha = \frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha,$$

$$\frac{2}{3}\cos \alpha = \frac{5}{9},$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

Uwaga

Obliczenie, jaką częścią boku rombu jest odcinek AN , możemy też wykonać, korzystając ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Niech $|AN| = x$. Wtedy pole rombu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD} = a^2 \sin \alpha,$$

a pole trójkąta AND jest równe

$$P_{AND} = \frac{1}{2}ax \sin \alpha.$$

Pole trójkąta AND to jedna trzecia pola rombu, więc

$$\frac{1}{2}ax \sin \alpha = \frac{1}{3}a^2 \sin \alpha.$$

Stąd

$$x = \frac{2}{3}a.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów AND i BDN jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej AB

albo

- zapisze dwa równania wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABD i AND : $m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha$, $m^2 = x^2 + a^2 - 2 \cdot x \cdot a \cos \alpha$, gdzie $x = |AN|$

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka AN w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD} = a^2 \sin \alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{2}ax \sin \alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{3}P_{ABCD}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka AN (lub NB) w zależności od długości boku rombu:

$$|AN| = \frac{2}{3}a \quad (|NB| = \frac{1}{3}a).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający zapisze jedno z równań, które pozwala obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:

$$m^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha) \text{ lub } m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

Zdający zapisze układ równań, pozwalający obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:

$$m^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha) \text{ oraz } m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right).$$

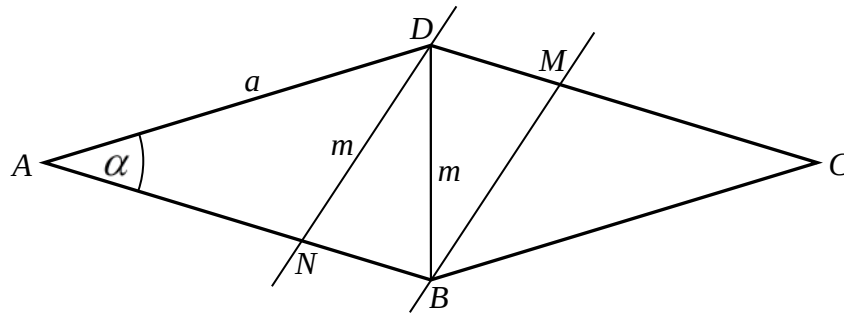
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt

Rozwiązanie pełne 6 pkt

Zdający obliczy $\cos \alpha$: $\cos \alpha = \frac{5}{6}$.

IV sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach oraz romb $ABCD$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta NBD jest trzecią częścią pola trójkąta BDA . Trójkąty NBD i BDA są równoramienne i mają ten sam kąt przy wierzchołku B , a jest to kąt przy podstawie każdego z tych trójkątów, więc trójkąty te są podobne. Skala s tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2 = \frac{P_{NBD}}{P_{BDA}} = \frac{\frac{1}{3}P_{BDA}}{P_{BDA}} = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$m^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BDA otrzymujemy

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos \alpha,$$

czyli

$$m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha,$$

$$\frac{1}{3}a^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha),$$

$$\frac{1}{3} = 2 - 2\cos \alpha,$$

$$2\cos \alpha = \frac{5}{3},$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

Schemat punktowania III i IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Zdający

- zapisze, że pole trójkąta FBD jest dwunastą częścią pola rombu $ABCD$

albo

- zapisze, że pole trójkąta SBA jest czwartą częścią pola rombu $ABCD$

albo

- zapisze, że pole trójkąta NBD jest trzecią częścią pola trójkąta BDA .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający

- zapisze, że trójkąty FBD i SBA są podobne i $P_{FBD} = \frac{1}{12} P_{ABCD}$, i $P_{SBA} = \frac{1}{4} P_{ABCD}$

albo

- zapisze, że trójkąty NBD i BDA są podobne i $P_{NBD} = \frac{1}{3} P_{BDA}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi $m, a, \cos \alpha$, np.:

$$m^2 = \frac{1}{3} a^2 \text{ i } m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha$$

lub

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi $m, a, \cos \alpha$, np.:

$$m^2 = \frac{1}{3} a^2 \text{ i } m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha$$

oraz

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt

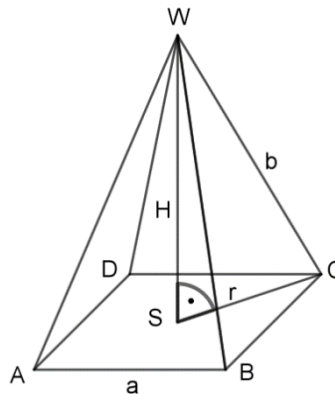
Rozwiązanie pełne 6 pkt

Zdający obliczy $\cos \alpha$: $\cos \alpha = \frac{5}{6}$.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa d . Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie (I sposób)



Wprowadzamy oznaczenia: r – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, b – krawędź boczna, a – krawędź podstawy, H – wysokość ostrosłupa.

Z zależności $r + b = d$ wyznaczamy $b = d - r$. W trójkącie SCW stosujemy tw. Pitagorasa:

$$H^2 = b^2 - r^2 = (b - r)(b + r) = d(b - r) = d(d - r - r) = d(d - 2r)$$

skąd wyznaczamy $H = \sqrt{d(d - 2r)}$.

Zauważamy, że $r > 0$ oraz $d - 2r > 0$, czyli $r \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$.

Wyznaczamy a w zależności od r : $a = r\sqrt{2}$ i zapisujemy objętość ostrosłupa w zależności od zmiennej r .

$$V(r) = \frac{1}{3}r^2 \cdot 2\sqrt{d^2 - 2dr} = \frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2 - 2r^5d} \quad \text{dla } r \in \left(0, \frac{d}{2}\right).$$

Rozważamy funkcję pomocniczą $f(r) = r^4d^2 - 2r^5d$, której dziedziną jest przedział $\left(0, \frac{d}{2}\right)$.

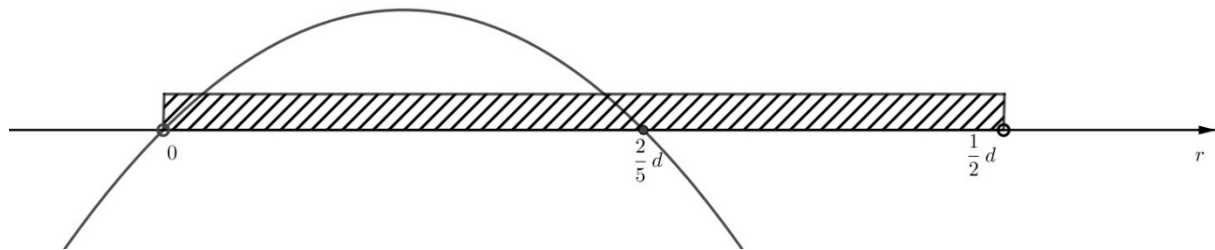
Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną

$$f'(r) = 4r^3d^2 - 10r^4d = 2r^3d(2d - 5r)$$

Jedynym miejscem zerowym z przedziału $\left(0, \frac{d}{2}\right)$ jest $r = \frac{2}{5}d$

($r = 0$ nie należy do dziedziny funkcji f).

Analizujemy monotoniczność funkcji f (np. na podstawie wykresu znaku pochodnej):



$f'(r) > 0$ dla $r \in \left(0, \frac{2}{5}d\right)$ (funkcja w tym przedziale rośnie),

$f'(r) < 0$ dla $r \in \left(\frac{2}{5}d, \frac{1}{2}d\right)$ (funkcja w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja osiąga maksimum lokalne dla $r = \frac{2}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w dziedzinie.

Ponieważ funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest funkcją rosnącą, funkcja V oraz funkcja f są rosnące i malejące w tych samych przedziałach i przyjmują maksimum lokalne dla tego samego argumentu.

Wobec tego, ostrosłup ma największą objętość dla $r = \frac{2}{5}d$, czyli dla $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wysokość

tego ostrosłupa jest równa $H = \sqrt{d\left(d - \frac{4}{5}d\right)} = \frac{\sqrt{5}}{5}d$. Szukana objętość jest równa

$$V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3.$$

Odp. Największą objętość ma ostrosłup o krawędzi podstawy $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$, objętość ta jest

równa $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz wysokości w zależności od długości promienia okręgu opisanego na podstawie
- zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej r : $V(r) = \frac{2}{3}\sqrt{r^4 d^2 - 2r^5 d}$,
- określenie dziedziny funkcji V : $r \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

Drugi etap składa się z trzech części:

- a) wprowadzenie funkcji pomocniczej $f(r) = r^4 d^2 - 2r^5 d$ i wyznaczenie pochodnej
 $f'(r) = 4r^3 d^2 - 10r^4 d = 2r^3 d(2d - 5r)$
- b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $r = \frac{2}{5}d$,
- c) uzasadnienie, że dla $r = \frac{2}{5}d$ funkcja f osiąga największą wartość oraz że dla takiej wartości promienia objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji V , to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

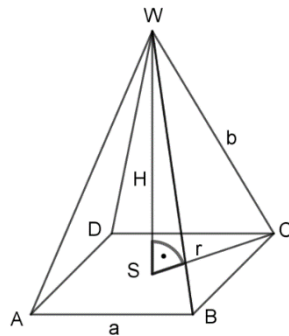
- Trzeci etap.

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d. \text{ Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: } V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3.$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie (II sposób)



Wprowadzamy oznaczenia, jak w I sposobie.

Z zależności $r + b = d$ wyznaczamy $b = d - r$. W trójkącie SCW stosujemy tw. Pitagorasa:

$$H^2 = d(d - 2r) : d \quad (d \neq 0)$$

$$\frac{H^2}{d} = d - 2r$$

$$r = \frac{1}{2} \left(d - \frac{H^2}{d} \right) = \frac{1}{2d} (d^2 - H^2)$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa $P_p = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$ oraz objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 H = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4d^2} (d^2 - H^2)^2 \cdot H$$

$$V(H) = \frac{1}{6d^2} (d^4 H - 2d^2 H^3 + H^5)$$

Z warunków geometrycznych $H > 0$ i $H < r + b$ (nierówność trójkąta w trójkącie SWC) wyznaczamy dziedzinę funkcji V :

$$H \in (0, d)$$

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną

$$V'(H) = \frac{1}{6d^2} (5H^4 - 6d^2H^2 + d^4)$$

Obliczamy miejsca zerowe i analizujemy znak pochodnej

$$V'(H) = 0 \Leftrightarrow 5H^4 - 6d^2H^2 + d^4 = 0$$

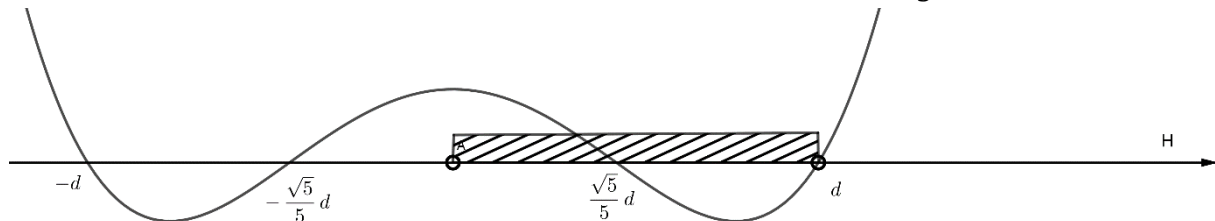
$$H^2 = t$$

$$5t^2 - 6d^2t + d^4 = 0$$

$$t = \frac{1}{5}d^2 \quad t = d^2$$

$$H = -\frac{\sqrt{5}}{5}d, \quad H = \frac{\sqrt{5}}{5}d, \quad H = -d, \quad H = d$$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej w przedziale $(0, d)$ jest $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$.



$V'(H) > 0$ dla $H \in \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}d\right)$ (funkcja V w tym przedziale rośnie),

$V'(H) < 0$ dla $H \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}d, d\right)$ (funkcja V w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja V osiąga maksimum lokalne dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji V w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w przedziale $(0, d)$.

Ostrosłup ma największą objętość dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$, czyli dla $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Największa objętość

jest równa $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- a) wyznaczenie długości promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz pola podstawy w zależności od długości wysokości ostrosłupa

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej H :

$$V(H) = \frac{1}{6d^2}(d^4H - 2d^2H^3 + H^5)$$

c) określenie dziedziny funkcji V : $H \in (0, d)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej

$$V'(H) = \frac{1}{6d^2}(5H^4 - 6d^2H^2 + d^4),$$

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$,

c) uzasadnienie, że dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$ objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji V , to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- Trzeci etap.

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d. \text{ Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: } V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3.$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.