

W zadaniach od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Niech $L = \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4$. Wtedy

- A. $L = 1$ B. $L = 2$ C. $L = 3$ D. $L = 4$

Zadanie 2. (0–1)

Okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 625$ jest styczny do okręgu o środku $S = (12, 5)$ i promieniu r . Wynika stąd, że

- A. $r = 5$ B. $r = 15$ C. $r = 10$ D. $r = 20$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$ jest równa

- A. 1 B. -1 C. $3-2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}+1$

Zadanie 4. (0–1)

Spośród poniższych nierówności wskaż tę, którą spełniają dokładnie trzy liczby całkowite.

- A. $\left|\frac{3}{4}x+5\right| < 2$ B. $\left|\frac{4}{3}x+5\right| < 2$ C. $\left|\frac{3}{5}x+4\right| < 2$ D. $\left|\frac{4}{5}x+3\right| < 2$

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A = \left(6, \frac{36}{5}\right)$ tego wykresu.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności, pierwszą i drugą cyfrę po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

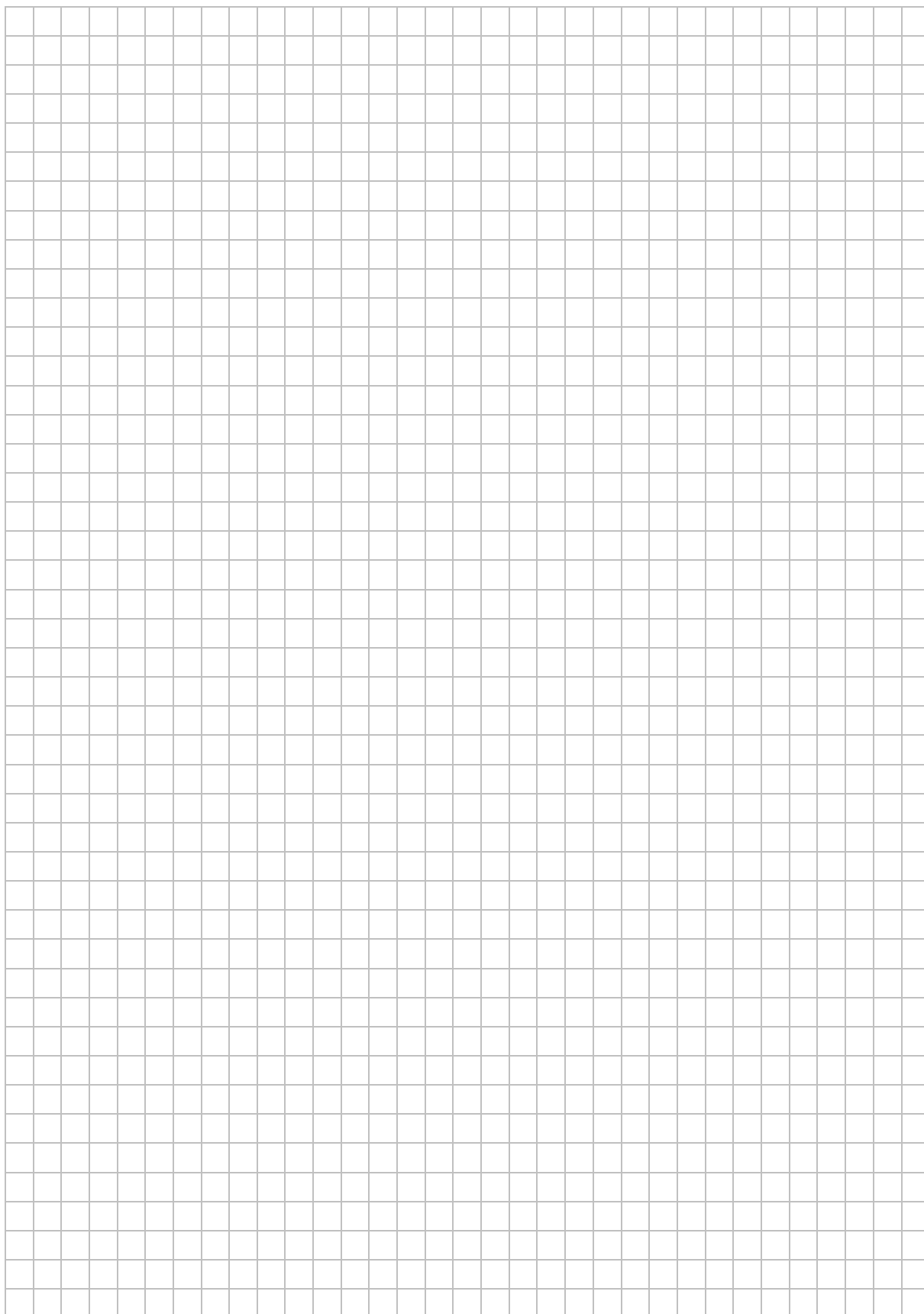
--	--	--

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

This image shows a full page of blank graph paper. The background is a very light gray, and it is covered by a precise grid of thin, medium-gray lines. The grid consists of small, equal-sized squares that extend across the entire area of the page, leaving no margins or other markings.

Zadanie 6. (0–3)

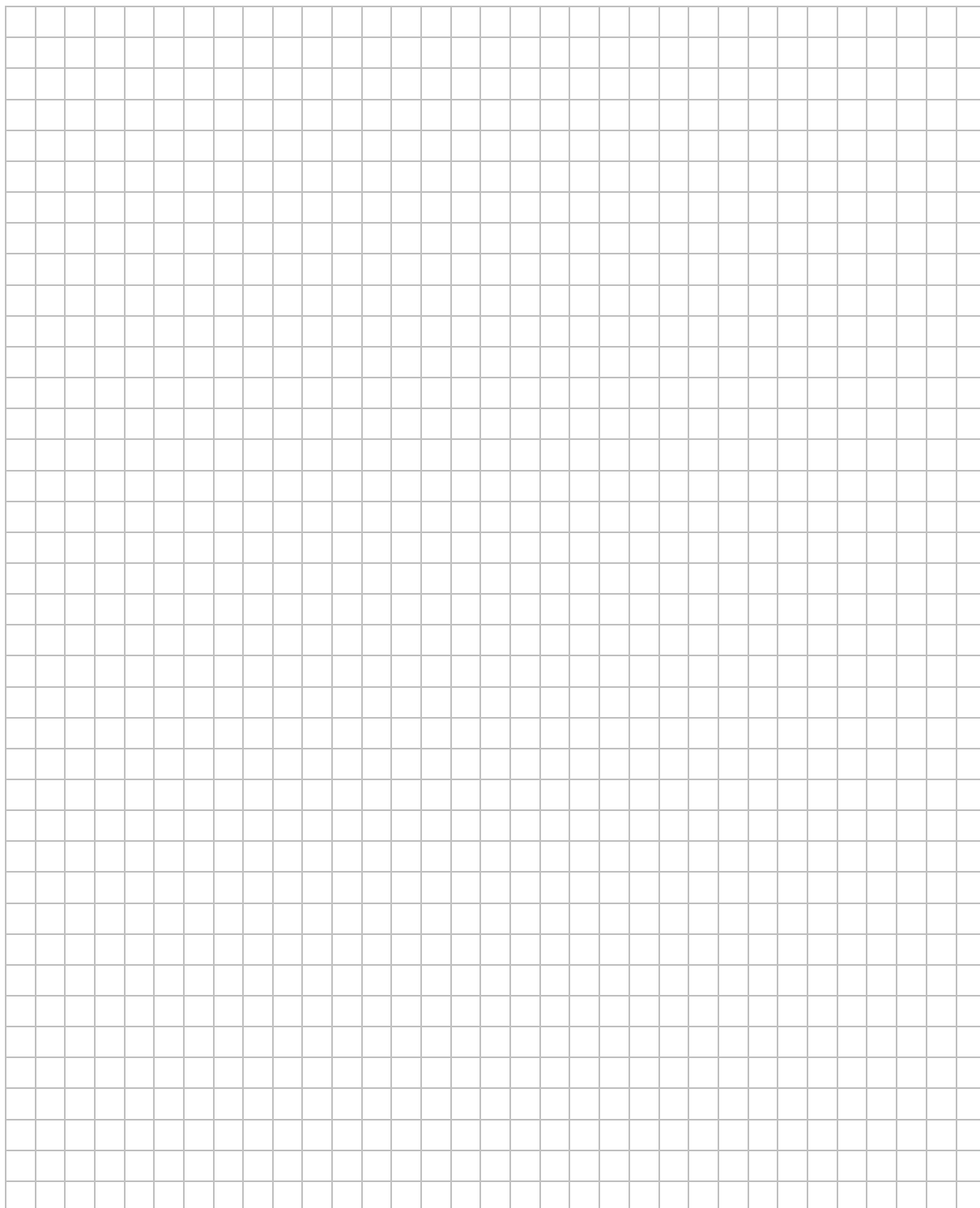
W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.



Zadanie 7. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność

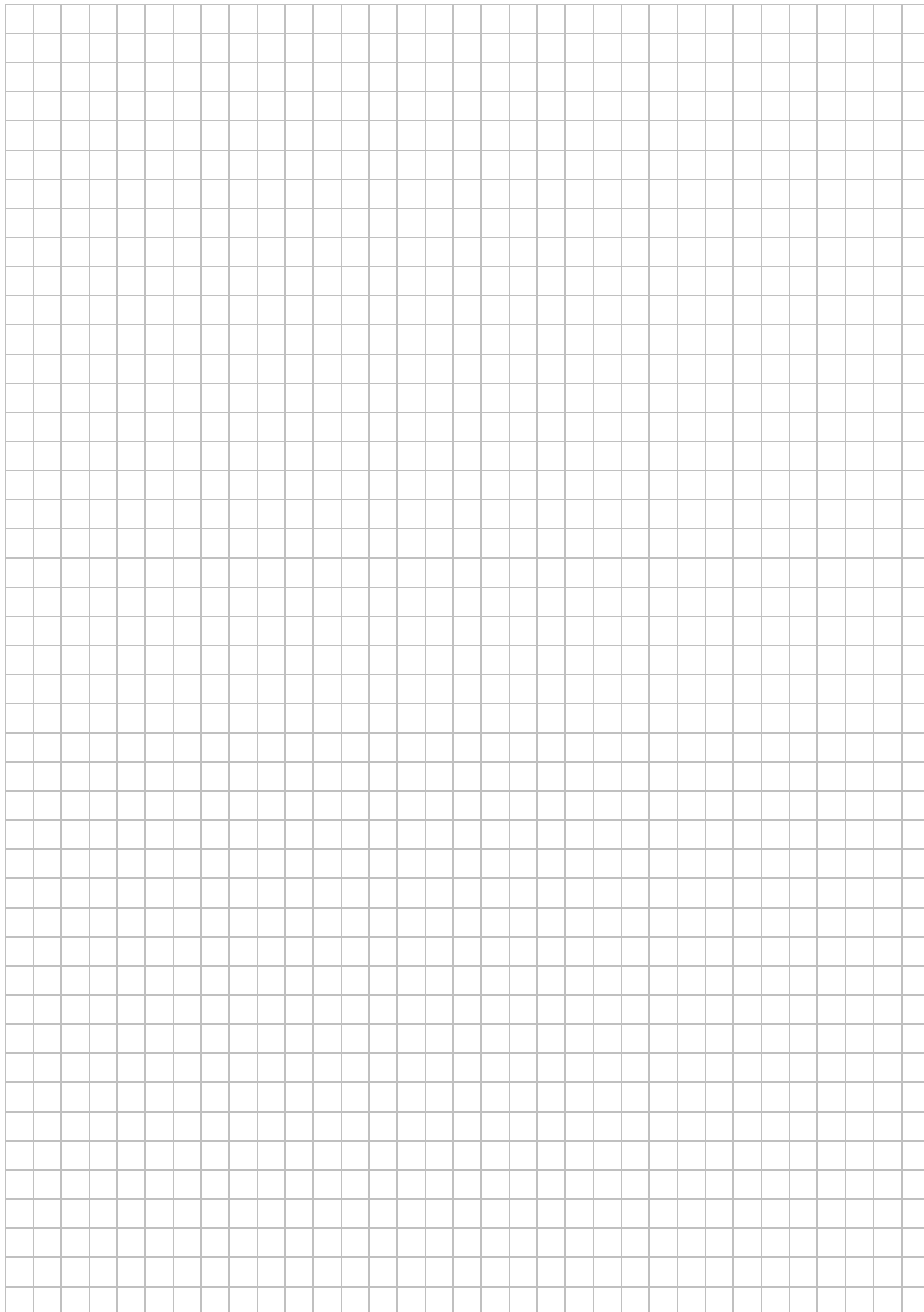
$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{4}.$$



Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.	7.
	Maks. liczba pkt	2	3	3
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że równanie $x^8 + x^2 = 2(x^4 + x - 1)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x = 1$.



Zadanie 9. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

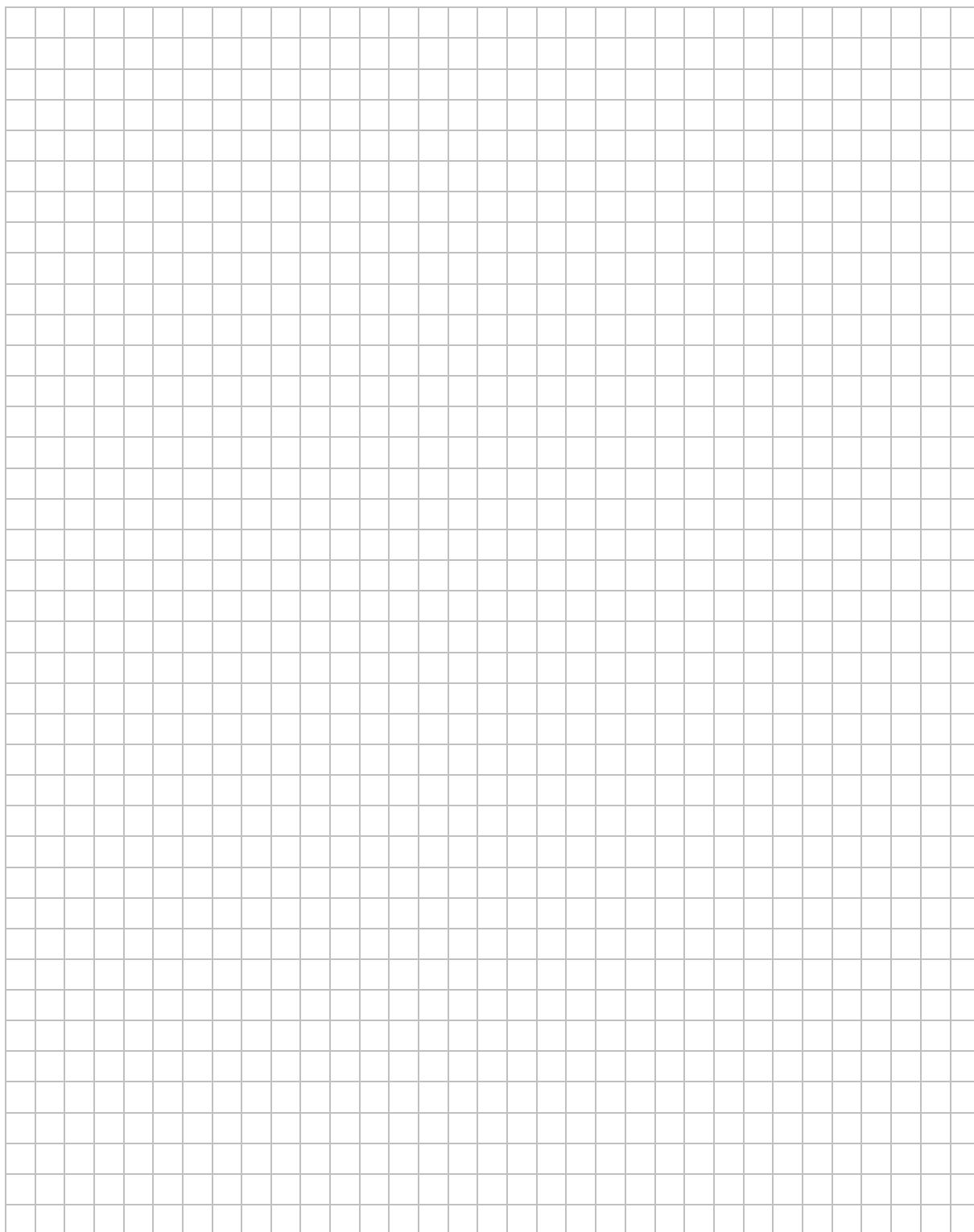
This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–4)

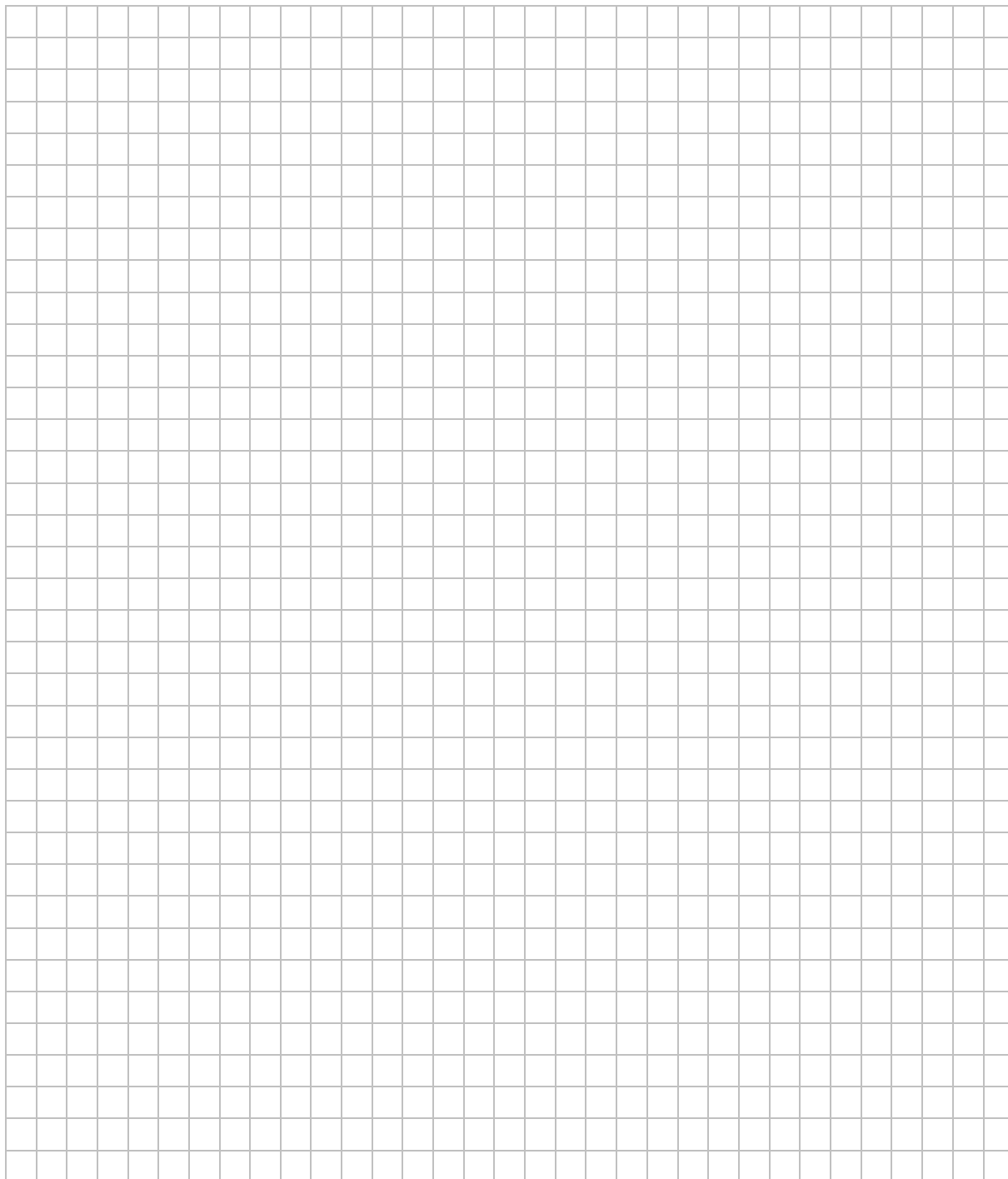
Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.



Odpowiedź:

Zadanie 11. (0–4)

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k} . Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k , gdzie $k \geq 1$.

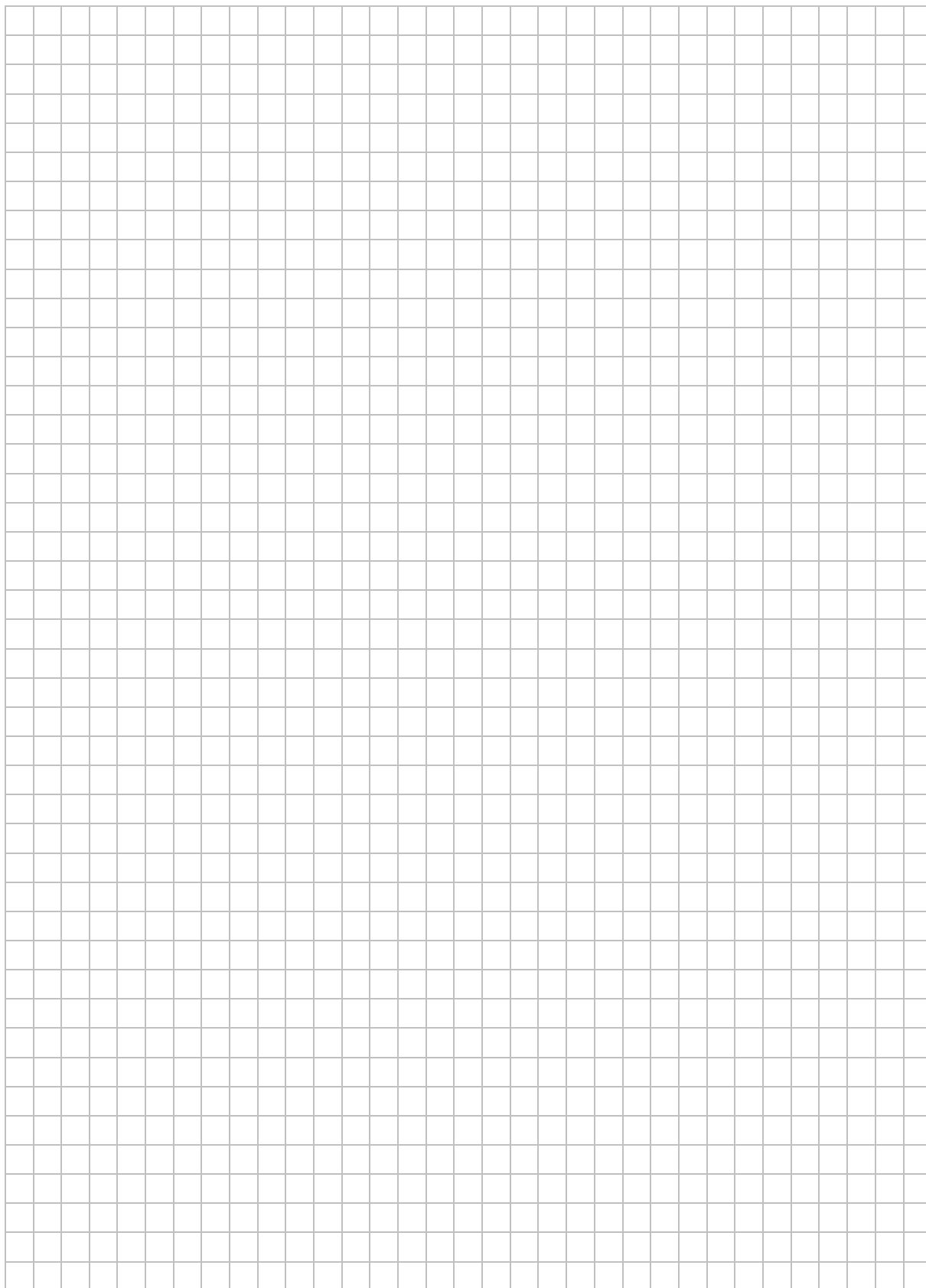


Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.	11.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt		

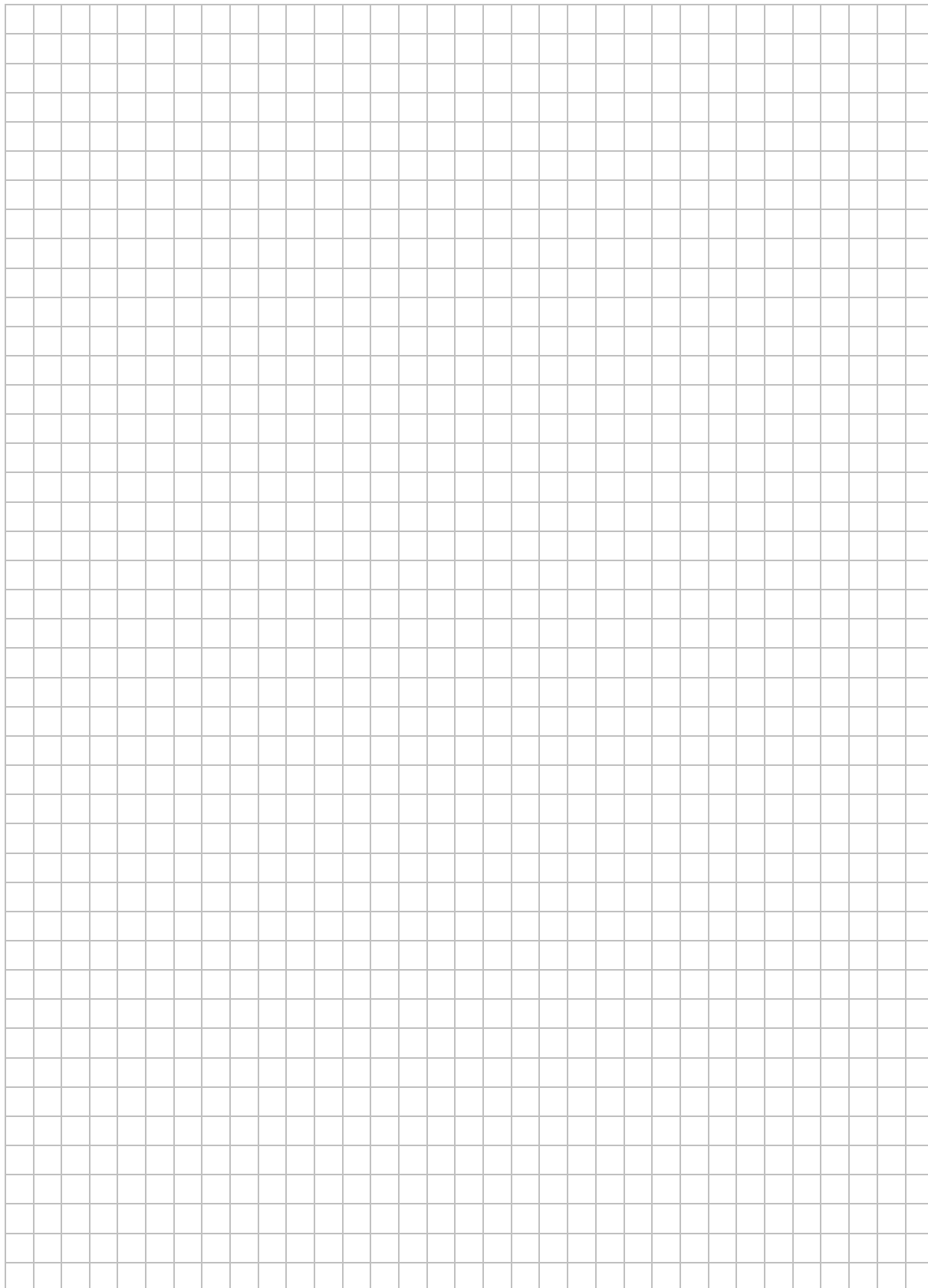
Zadanie 12. (0–5)

Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10, a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD . Oblicz pole tego trapezu.



Zadanie 13. (0–5)

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB , BC i CA w punktach – odpowiednio – $P=(0,10)$, $Q=(8,6)$ i $R=(9,13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A , B i C tego trójkąta.

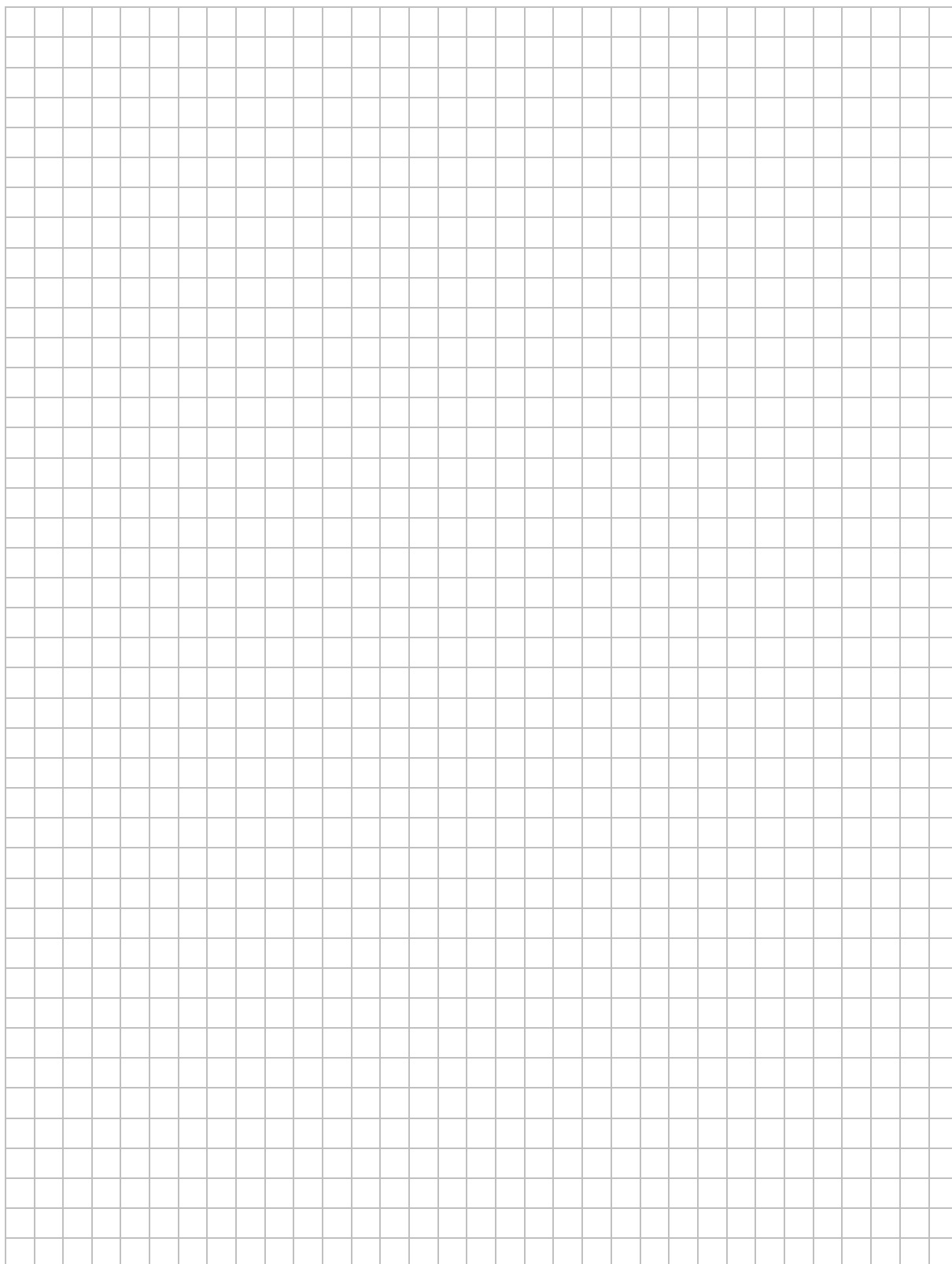


Zadanie 14. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

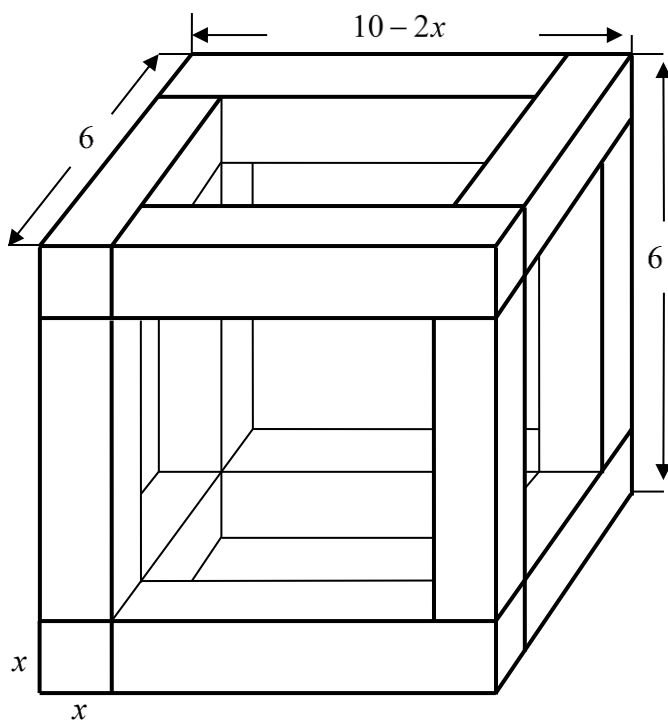
$$x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$.



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x . Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



- Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x .
- Wyznacz dziedzinę funkcji V .
- Oblicz tę wartość x , dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.

