

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wielomian W określony wzorem $W(x) = x^{2019} - 3x^{2000} + 2x + 6$

- A. jest podzielny przez $(x-1)$ i z dzielenia przez $(x+1)$ daje resztę równą 6.
- B. jest podzielny przez $(x+1)$ i z dzielenia przez $(x-1)$ daje resztę równą 6.
- C. jest podzielny przez $(x-1)$ i jest podzielny przez $(x+1)$.
- D. nie jest podzielny ani przez $(x-1)$, ani przez $(x+1)$.

Zadanie 2. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{3n^2 + 7n - 5}{11 - 5n + 5n^2}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Granica tego ciągu jest równa

- A. 3 B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{5}{11}$

Zadanie 3. (0–1)

Mamy dwie urny. W pierwszej są 3 kule białe i 7 kul czarnych, w drugiej jest jedna kula biała i 9 kul czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek, od jednego oczka do sześciu oczek. Jeśli w wyniku rzutu otrzymamy ściankę z jednym oczkiem, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku – losujemy jedną kulę z drugiej urny. Wtedy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{13}{15}$

Zadanie 4. (0–1)

Po przekształceniu wyrażenia algebraicznego $(x\sqrt{2} + y\sqrt{3})^4$ do postaci $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ współczynnik c jest równy

- A. 6 B. 36 C. $8\sqrt{6}$ D. $12\sqrt{6}$

Zadanie 5. (0–2)

W trójkącie ABC bok AB jest 3 razy dłuższy od boku AC , a długość boku BC stanowi $\frac{4}{5}$ długości boku AB . Oblicz cosinus najmniejszego kąta trójkąta ABC .

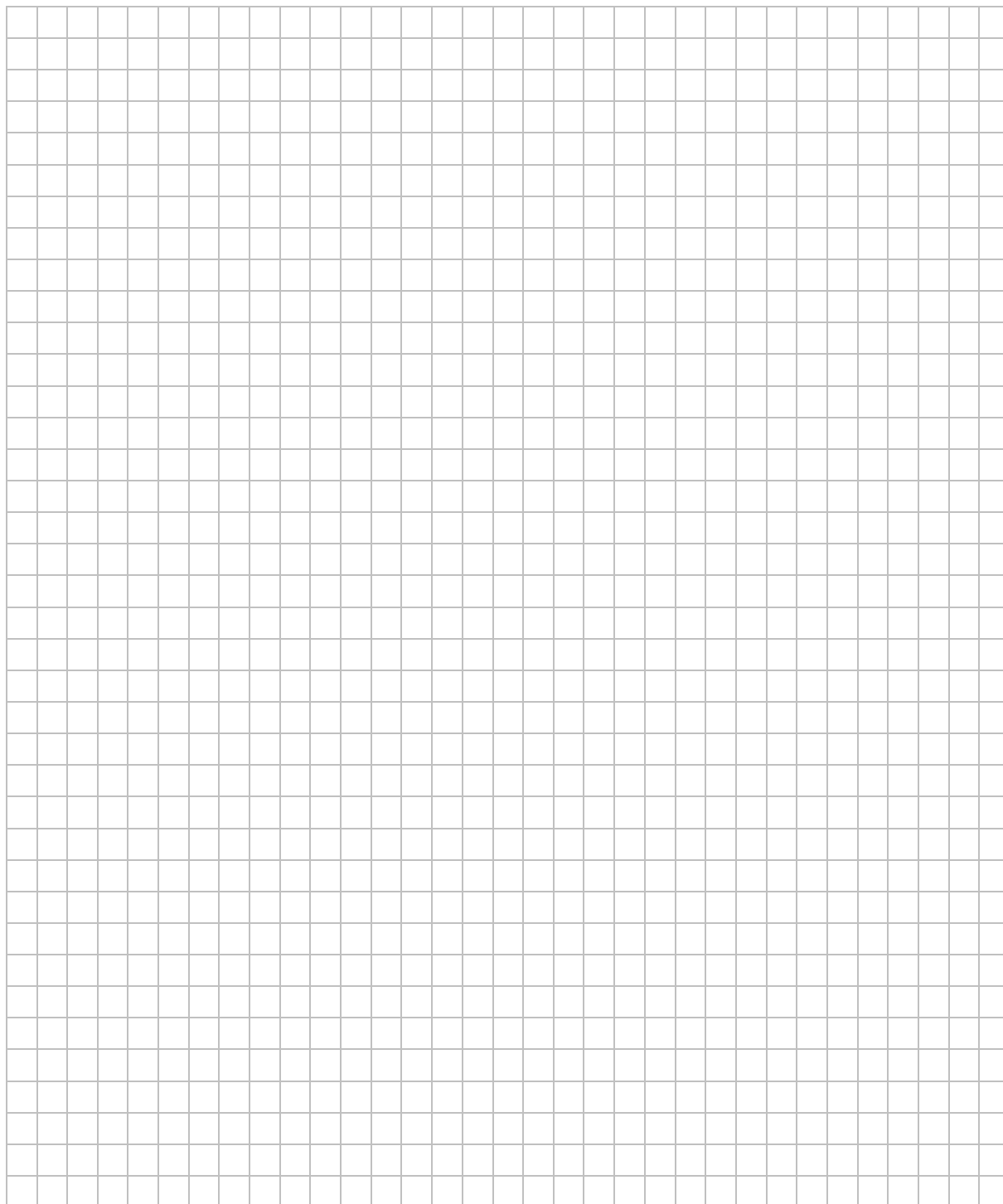
W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 6. (0–3)

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

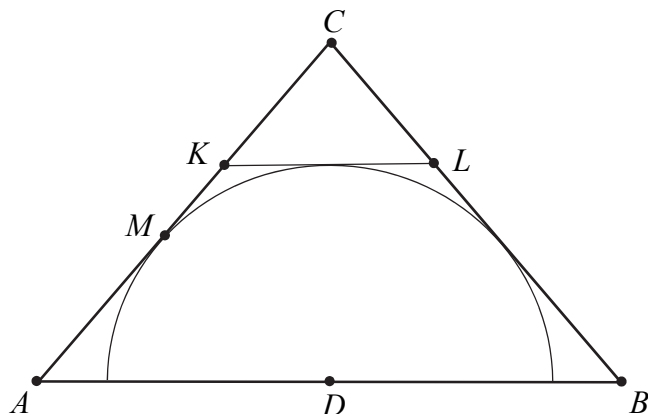


Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = 6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB . Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M . Punkt K leży na boku AC , punkt L leży na boku BC , odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|KC| = |LC| = 2$ (zobacz rysunek).

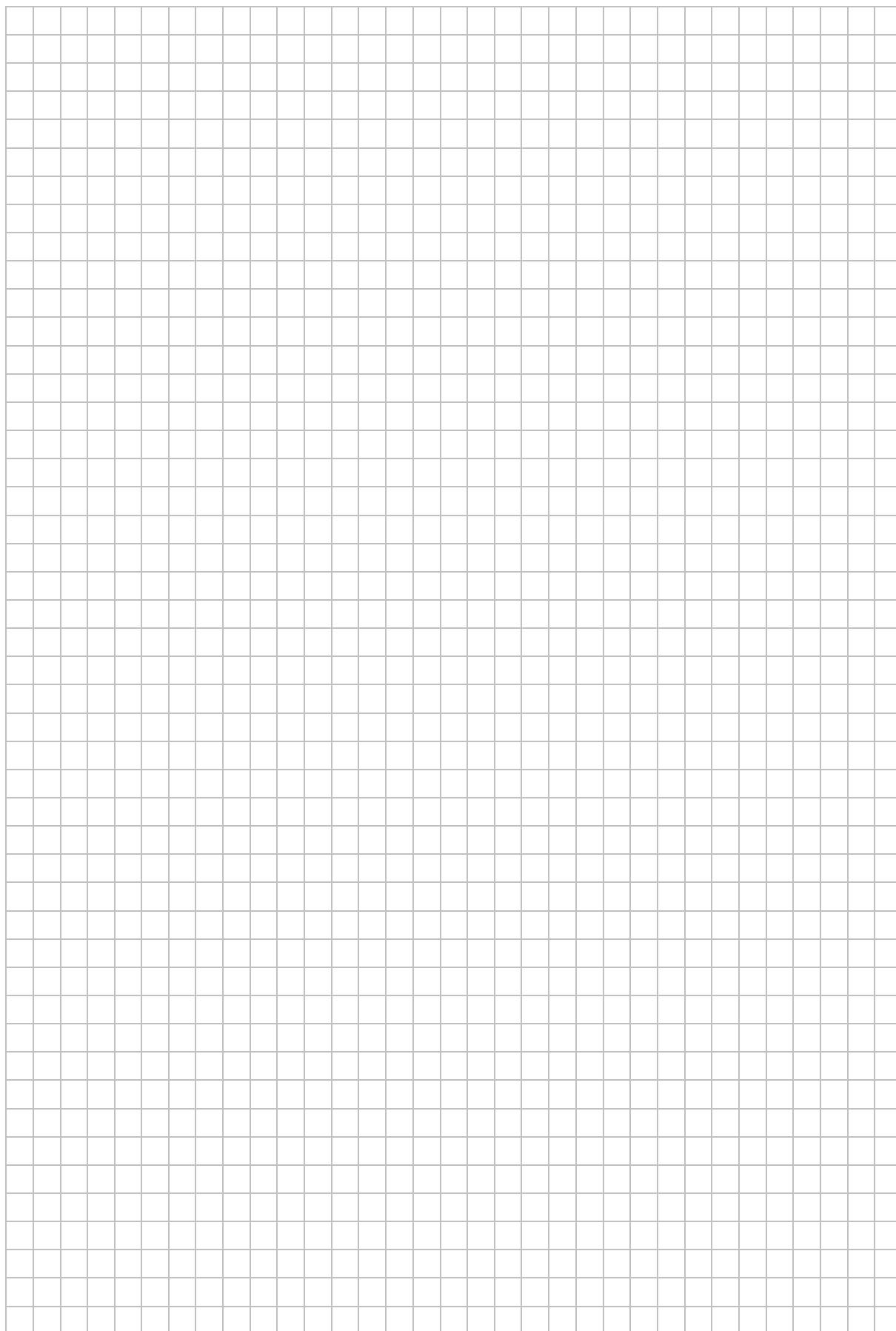


Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.



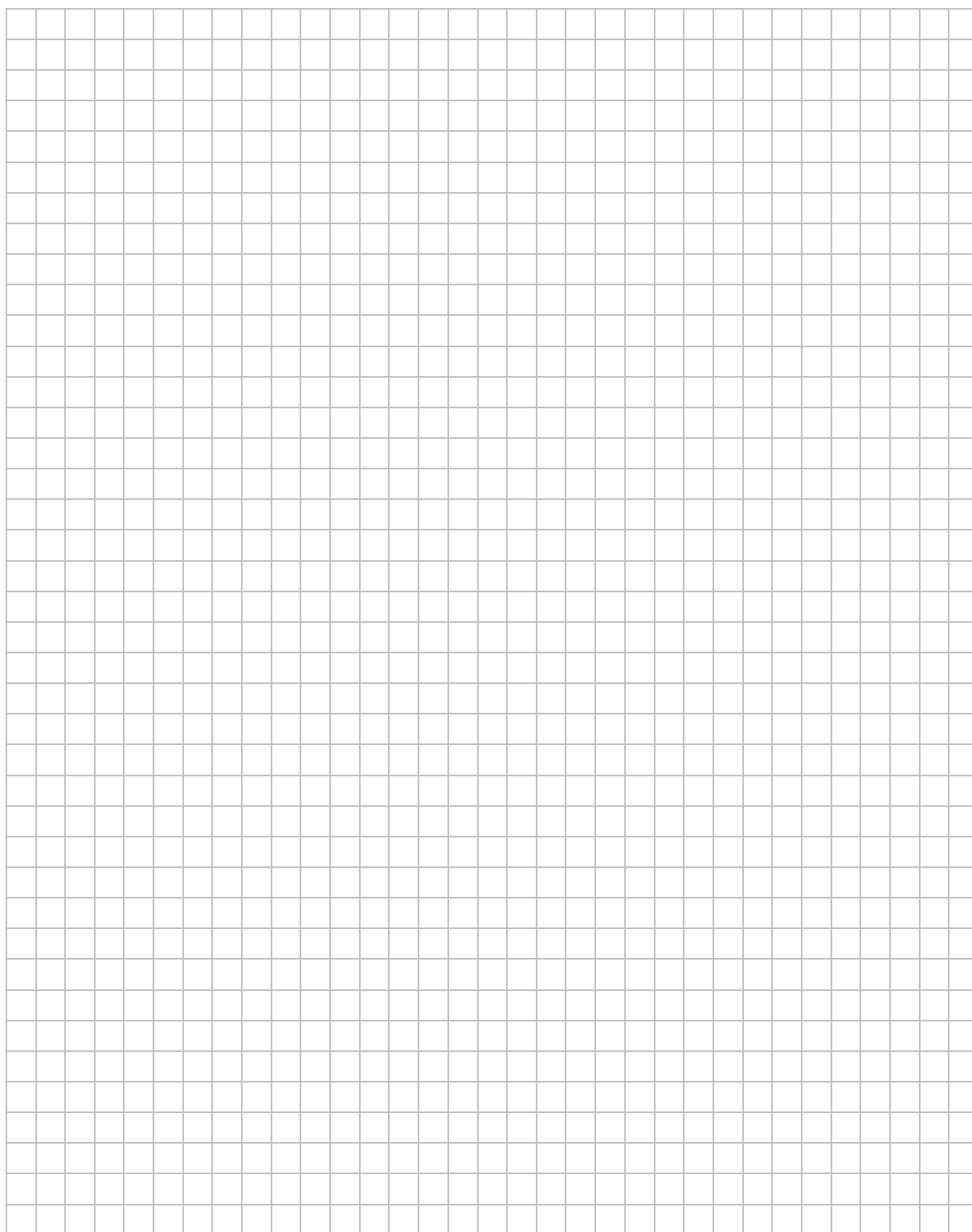
Zadanie 8. (0–3)

Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.



Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie $3 \cos 2x + 10 \cos^2 x = 24 \sin x - 3$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



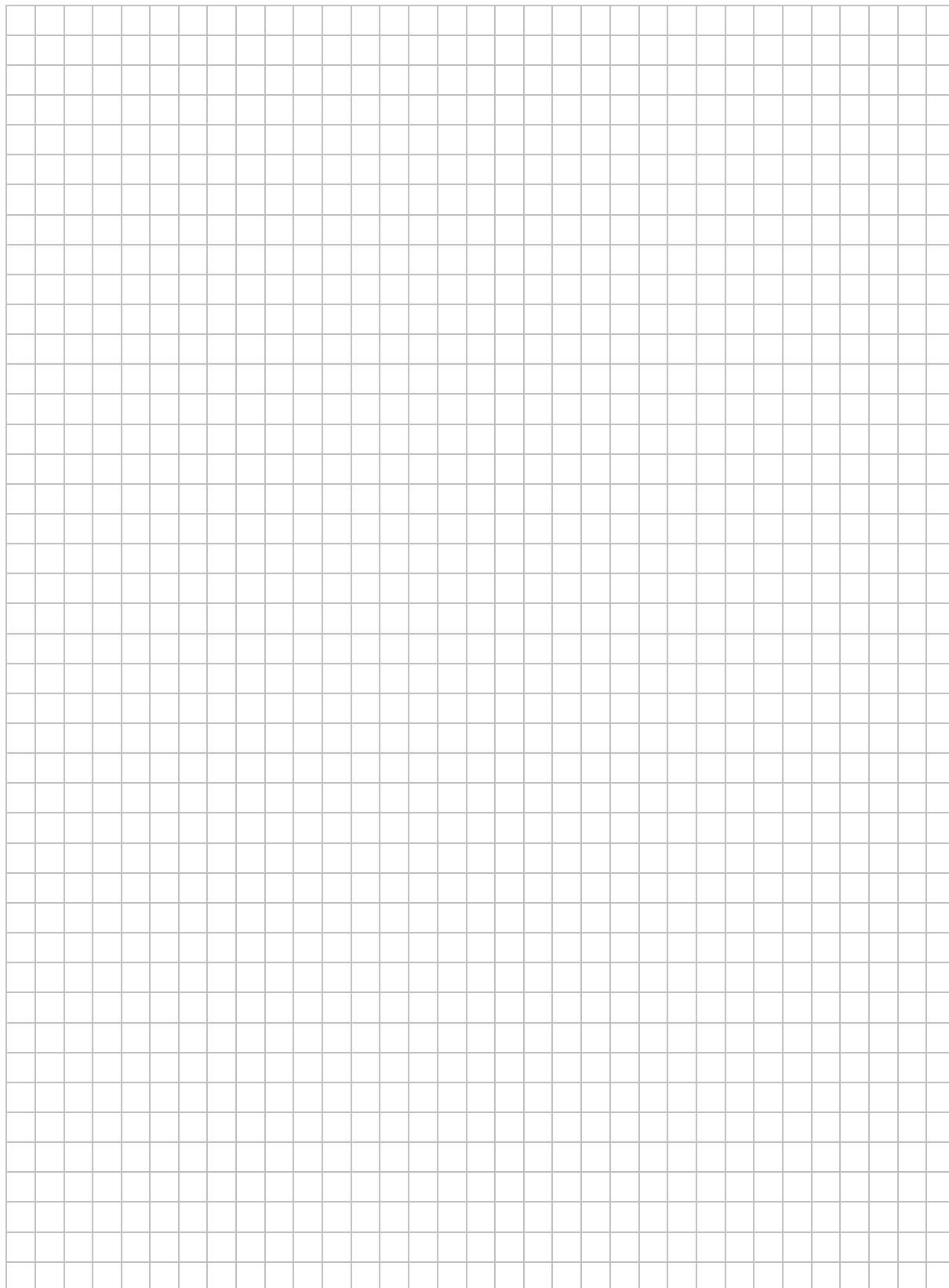
Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–5)

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$.

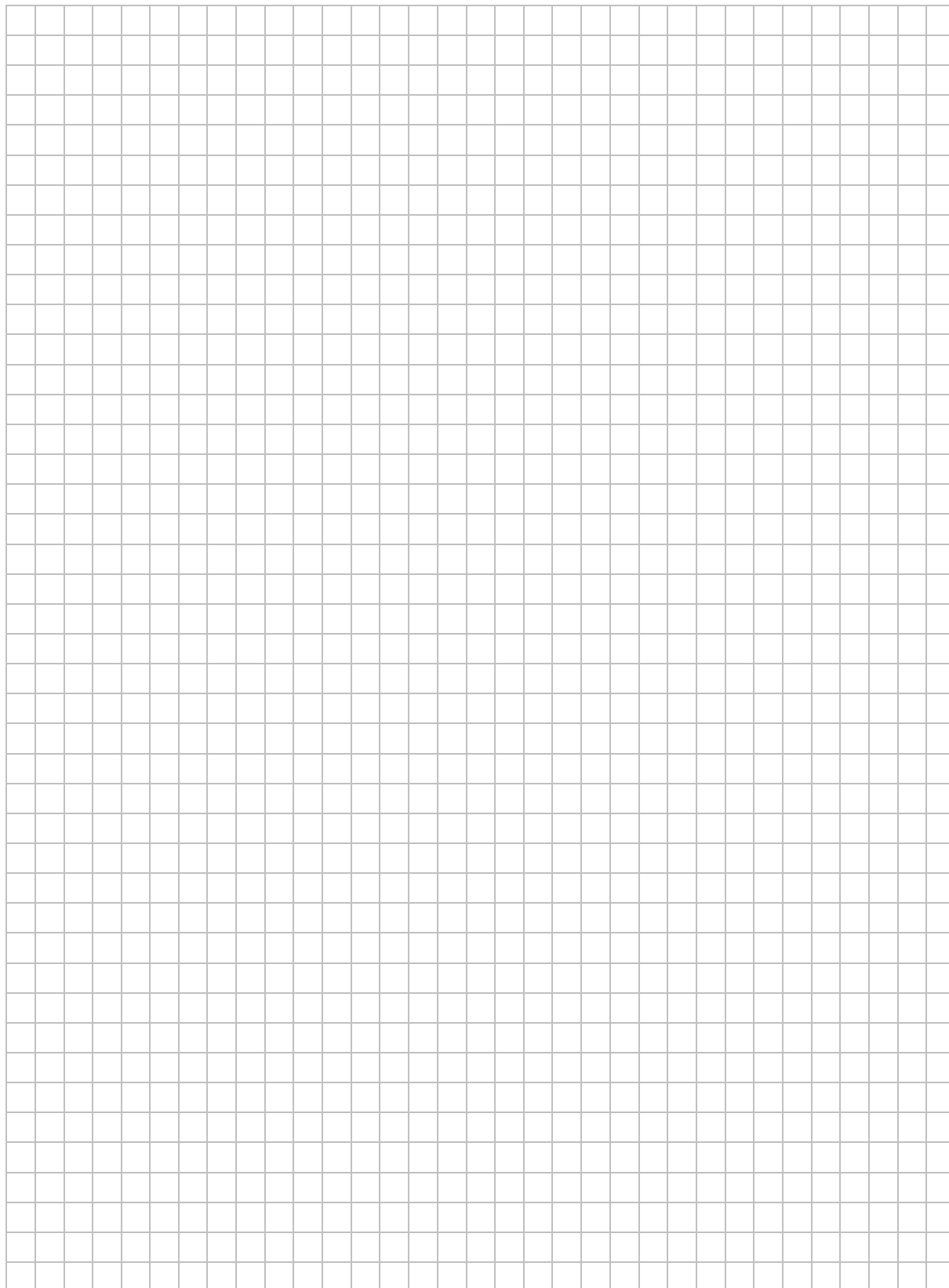
Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .



Zadanie 11. (0–4)

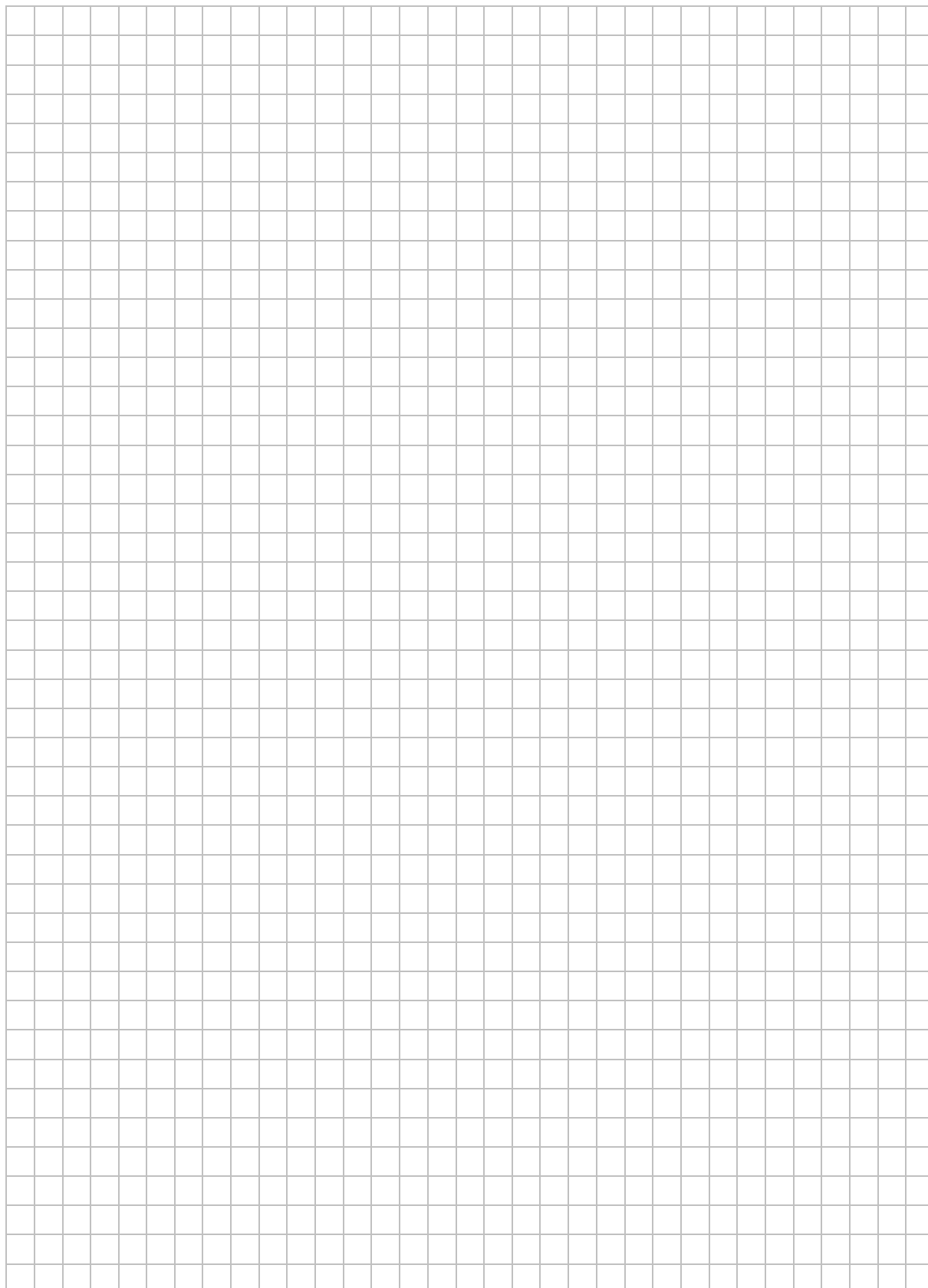
Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ z niewiadomą x . Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek

$$2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2.$$



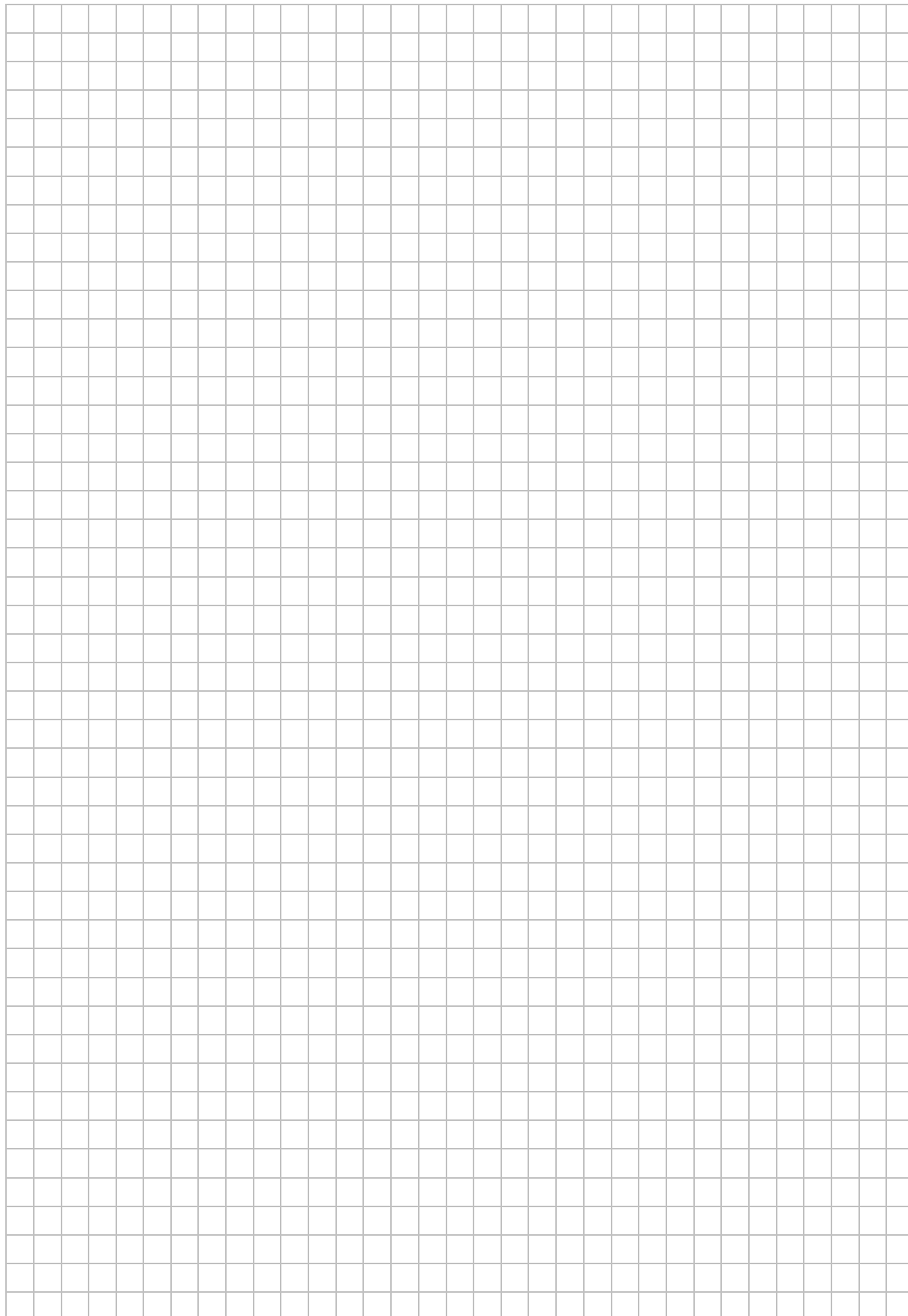
Zadanie 12. (0–5)

Prosta o równaniu $x + y - 10 = 0$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$ w punktach K i L . Punkt S jest środkiem cięciwy KL . Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$.



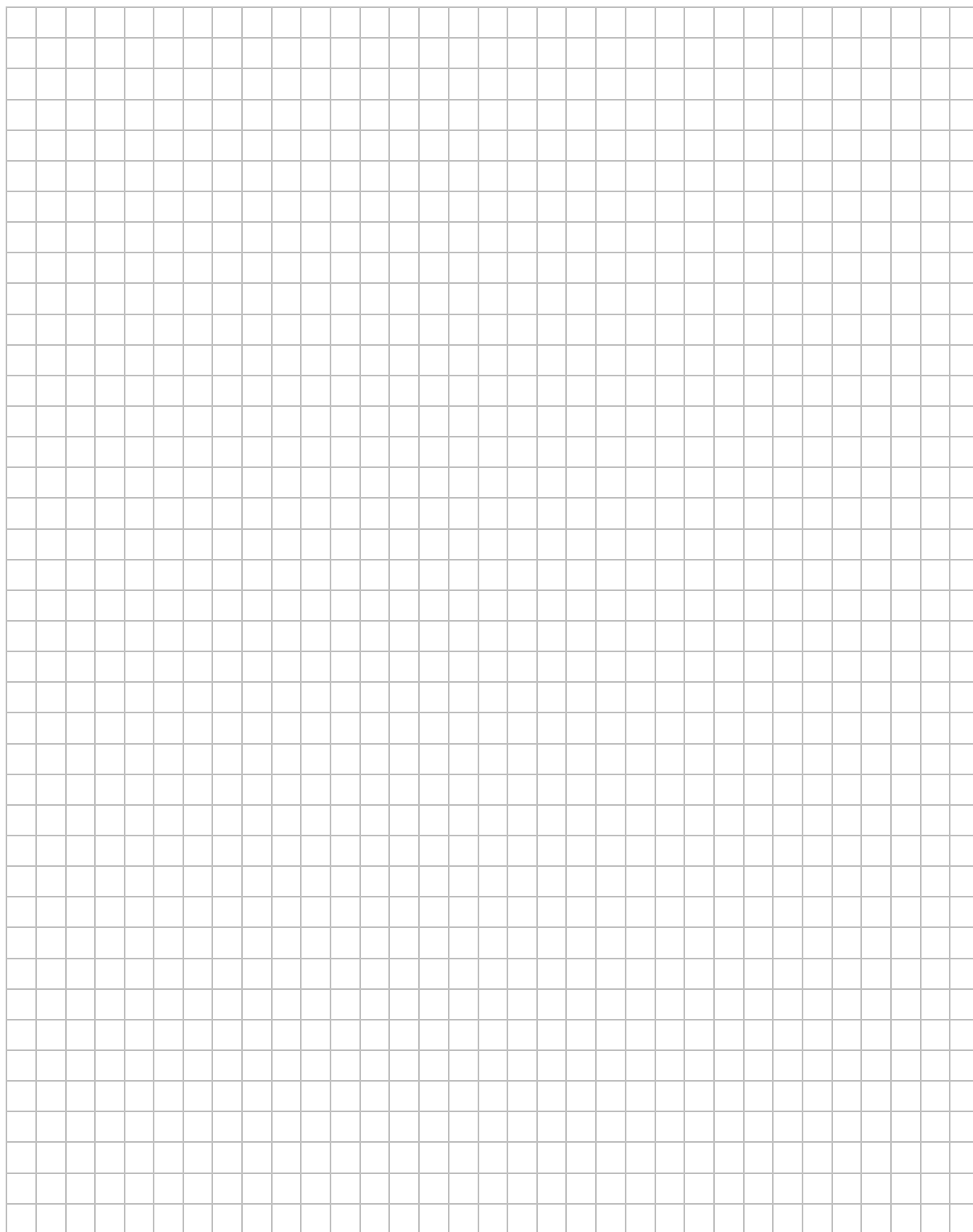
Zadanie 13. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.



Zadanie 14. (0–6)

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCD S$ jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ramiona tego trapezu mają długości $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa 30° . Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α , taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{2}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 15. (0–7)

Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe 0,5 cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe 0,3 cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60 cm^2 . Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.

