

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ wartość wyrażenia $(\log_{\frac{1}{x}} y) \cdot (\log_{\frac{1}{y}} x)$ jest równa

- A. $x \cdot y$ B. $\frac{1}{x \cdot y}$ C. -1 D. 1

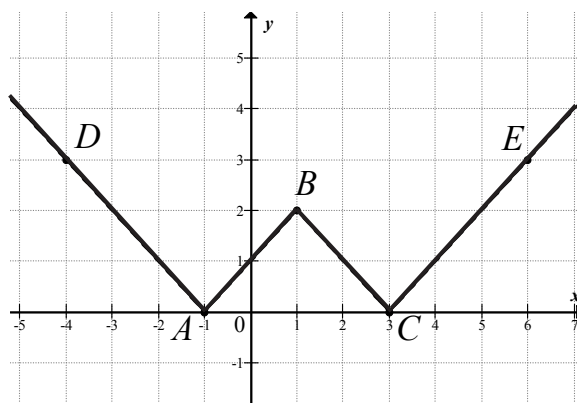
Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ$ jest równa

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 3. (0–1)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = f(x)$, który jest złożony z dwóch półprostych AD i CE oraz dwóch odcinków AB i BC , gdzie $A = (-1, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, 0)$, $D = (-4, 3)$, $E = (6, 3)$.



Wzór funkcji f to

- A. $f(x) = |x+1| + |x-1|$
B. $f(x) = ||x-1| - 2|$
C. $f(x) = ||x-1| + 2|$
D. $f(x) = |x-1| + 2$

Zadanie 4. (0–1)

Zdarzenia losowe A i B zawarte w Ω są takie, że prawdopodobieństwo $P(B')$ zdarzenia B' , przeciwnego do zdarzenia B , jest równe $\frac{1}{4}$. Ponadto prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Wynika stąd, że

- A. $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ B. $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$ C. $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$ D. $P(A \cap B) = \frac{4}{5}$

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n^3 + 11n^2}{7n^3 + 5n^2 + 3n + 1} - \frac{n^2}{3n^2 + 1} \right)$$

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 6. (0–3)

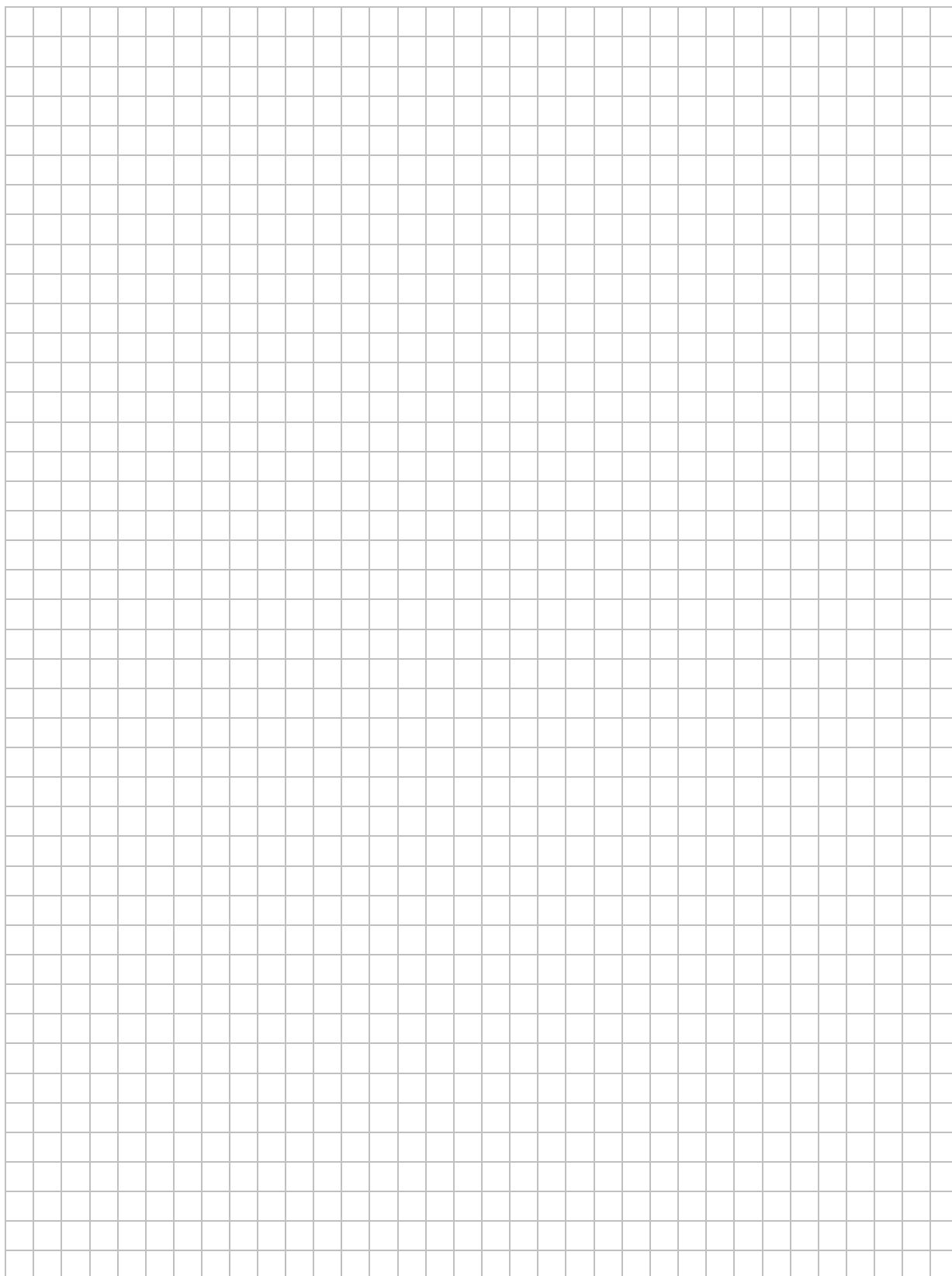
Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiegokolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–2)

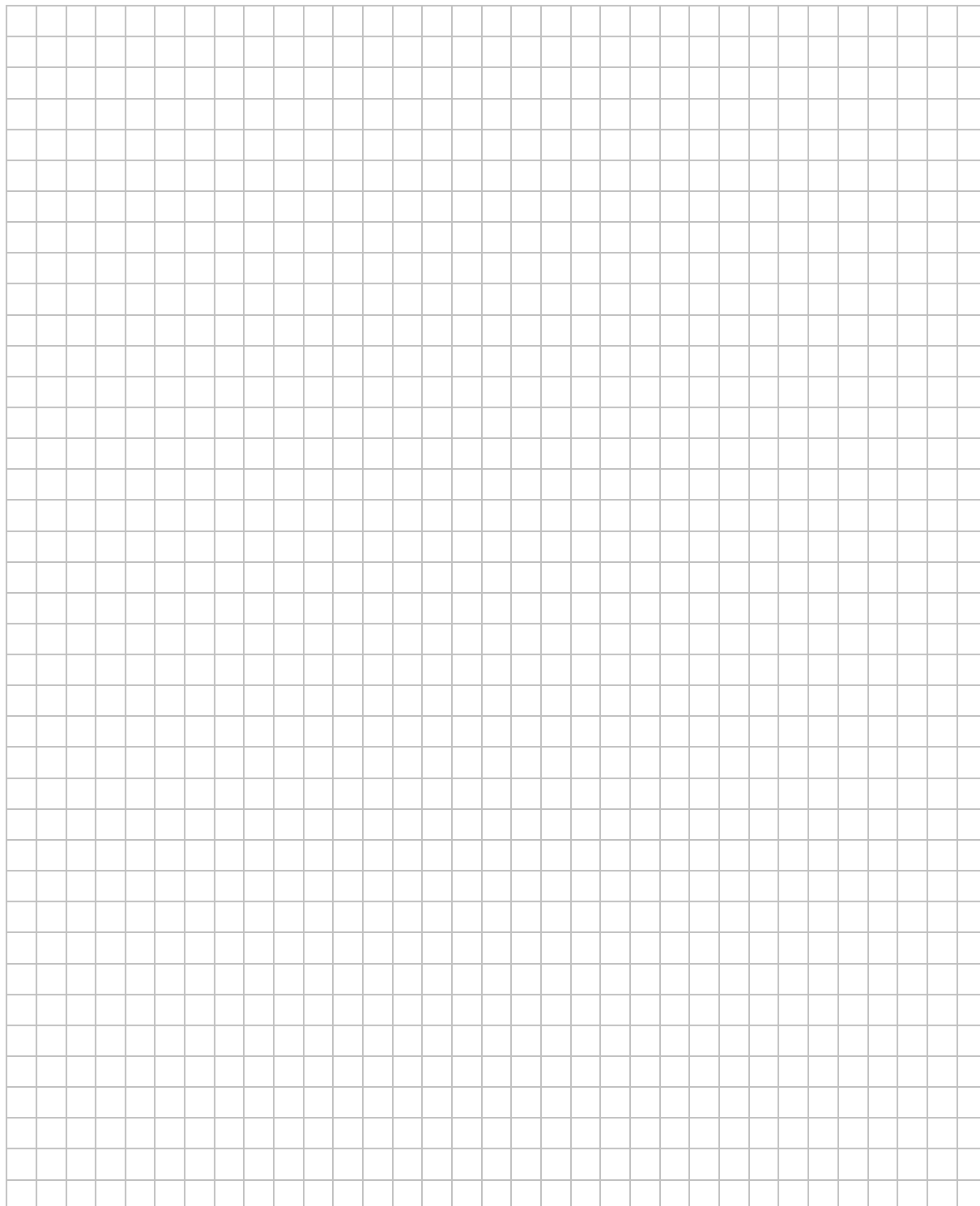
Punkt $P = (10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P . Oblicz współczynnik b .



Odpowiedź:

Zadanie 8. (0–3)

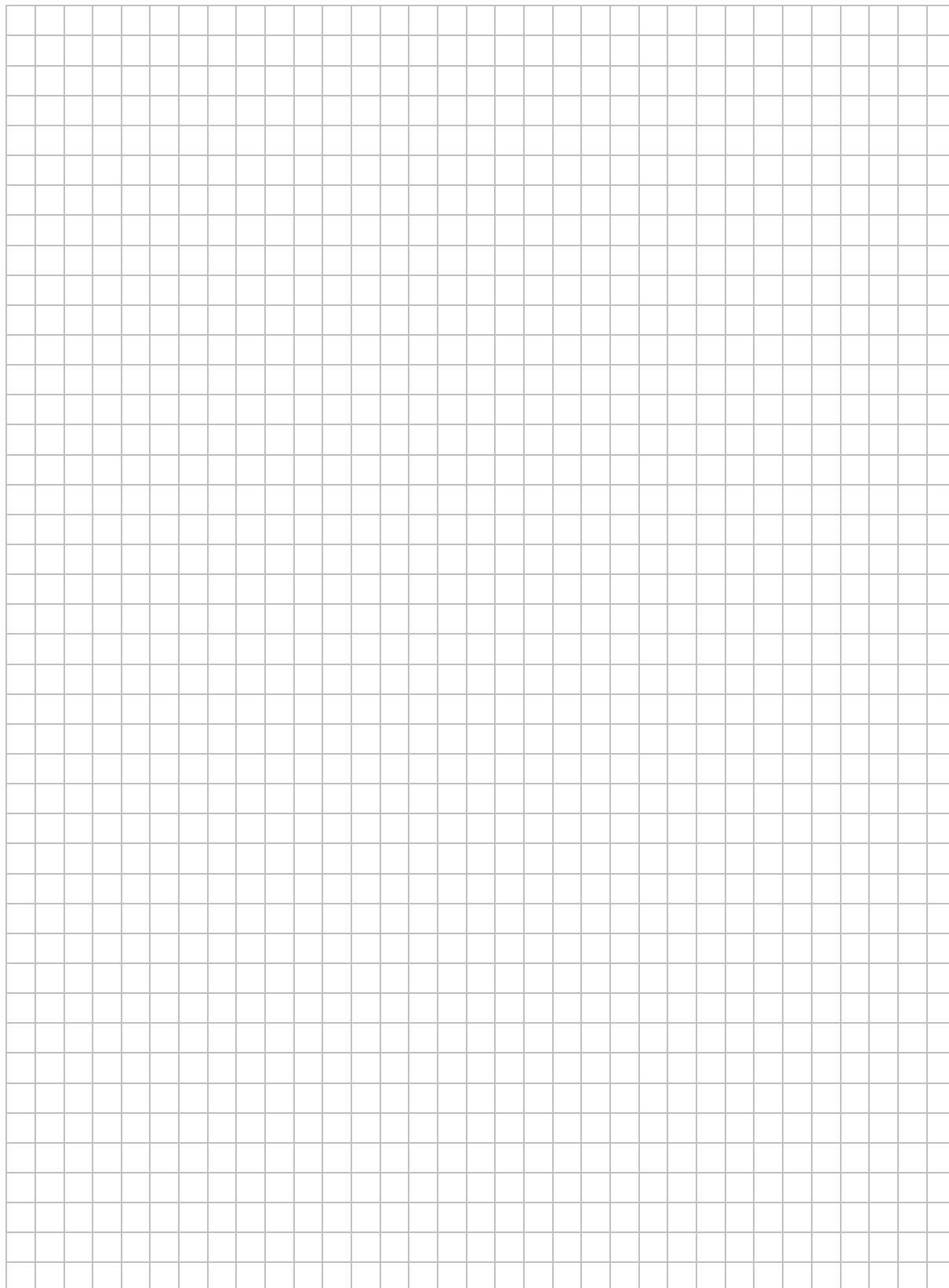
Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y , takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a , prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$.



Wypełnia egzaminator	Nr zadania	7.	8.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

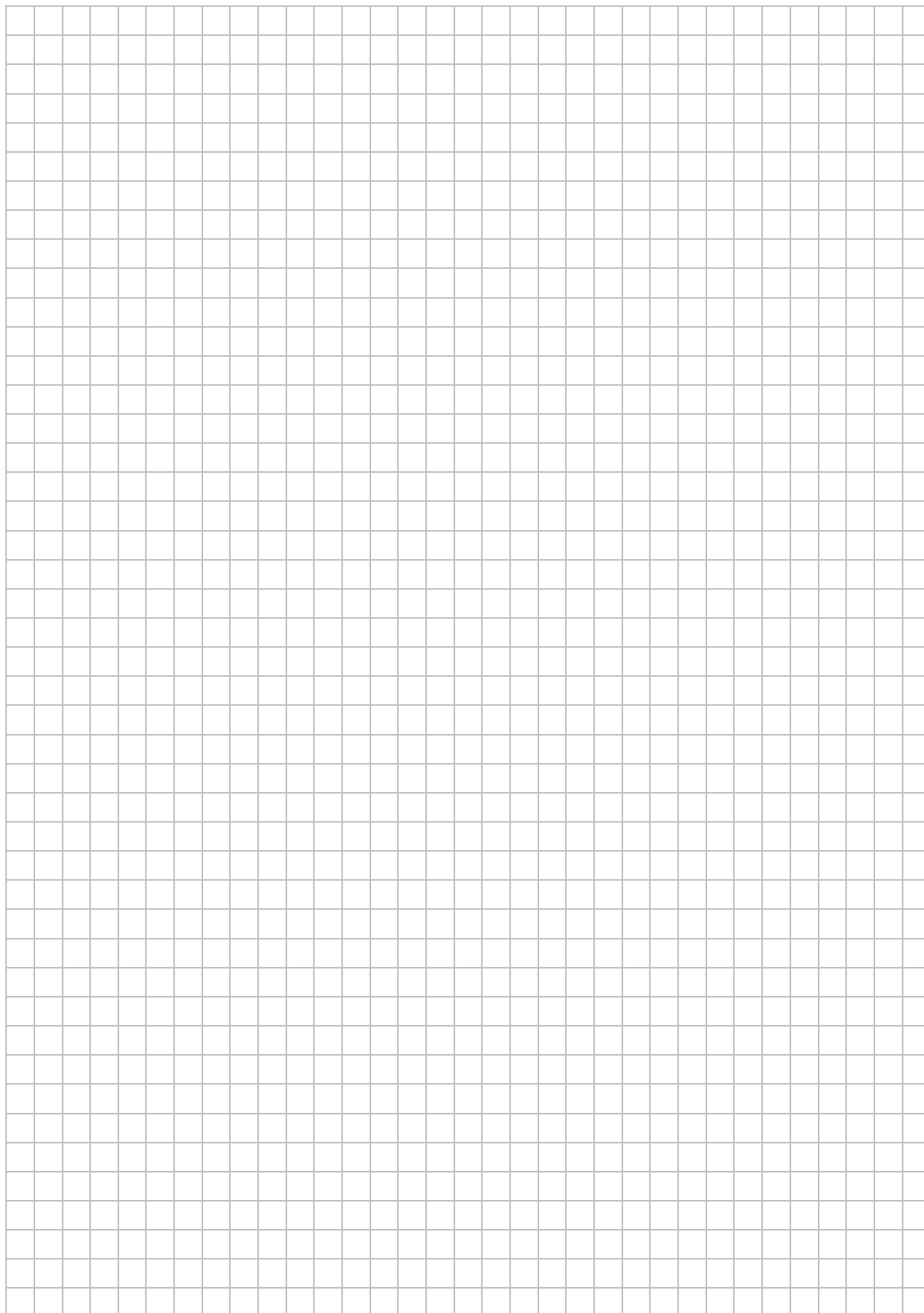
Zadanie 9. (0–3)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC|=|BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N , w taki sposób, że $|AM|=|CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T . Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.



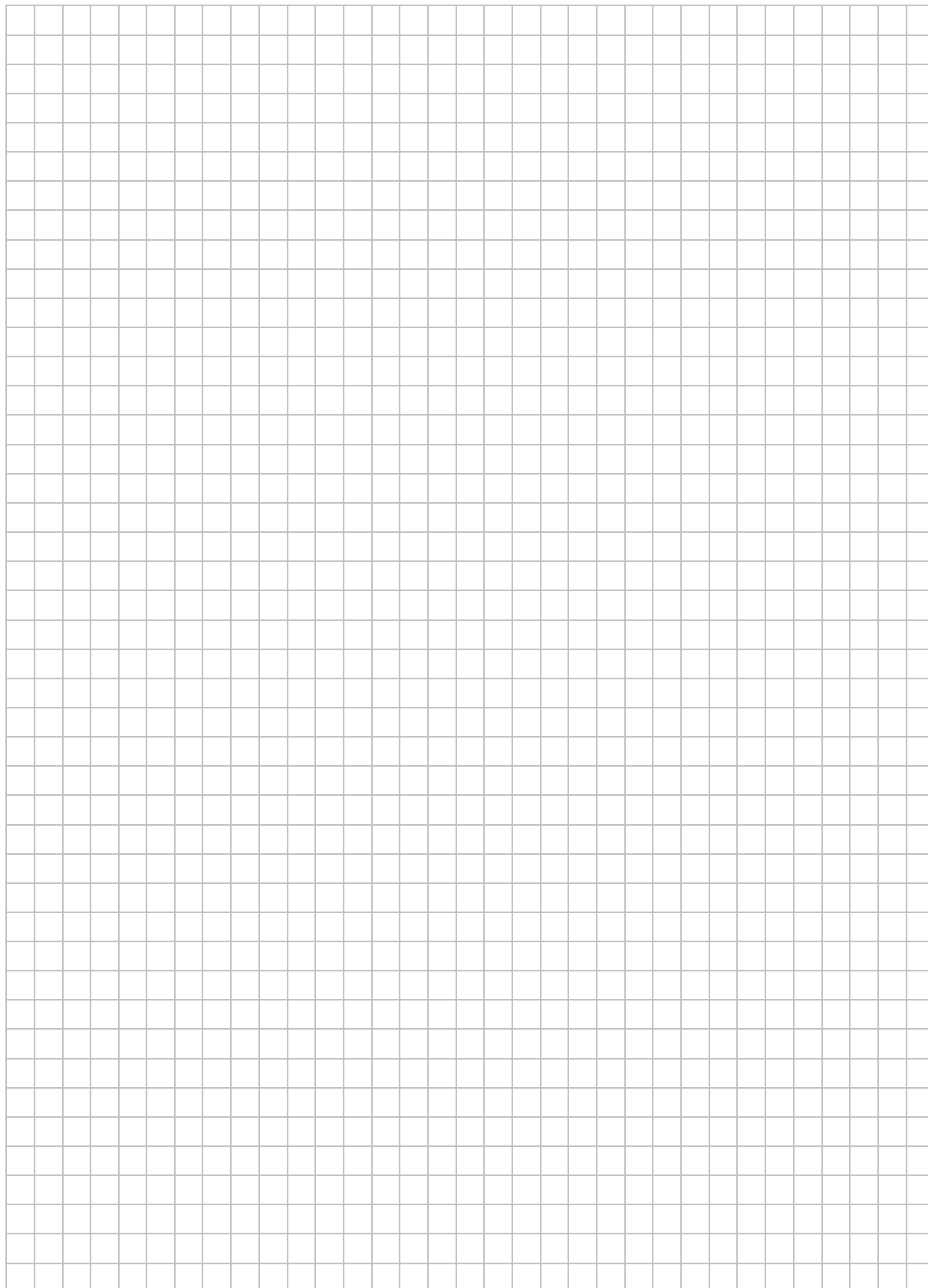
Zadanie 10. (0–4)

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC|=16$, $|AD|=6$, $|CD|=14$ i $|BC|=|BD|$.
Oblicz obwód trójkąta ABC .



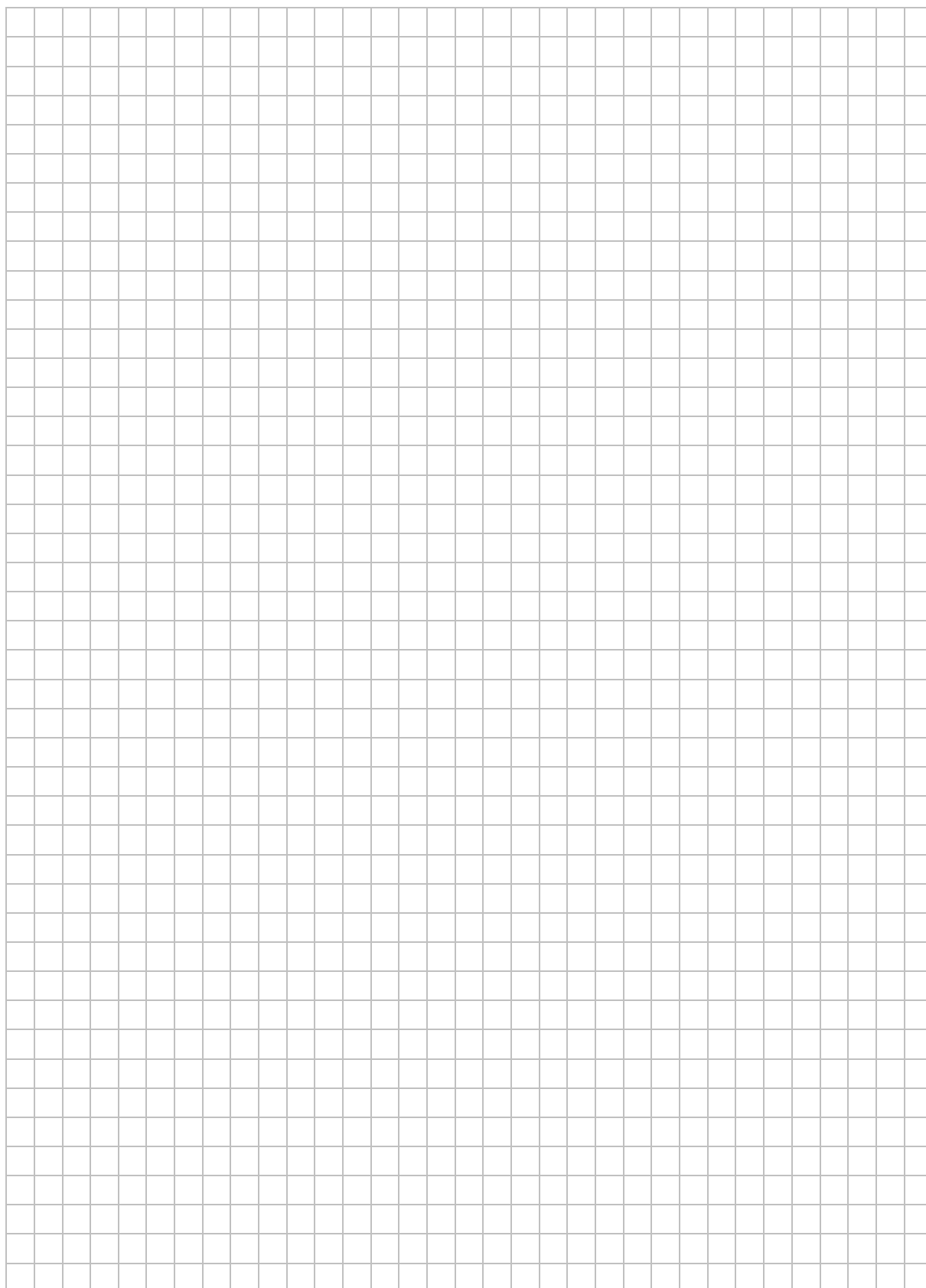
Zadanie 11. (0–6)

Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.



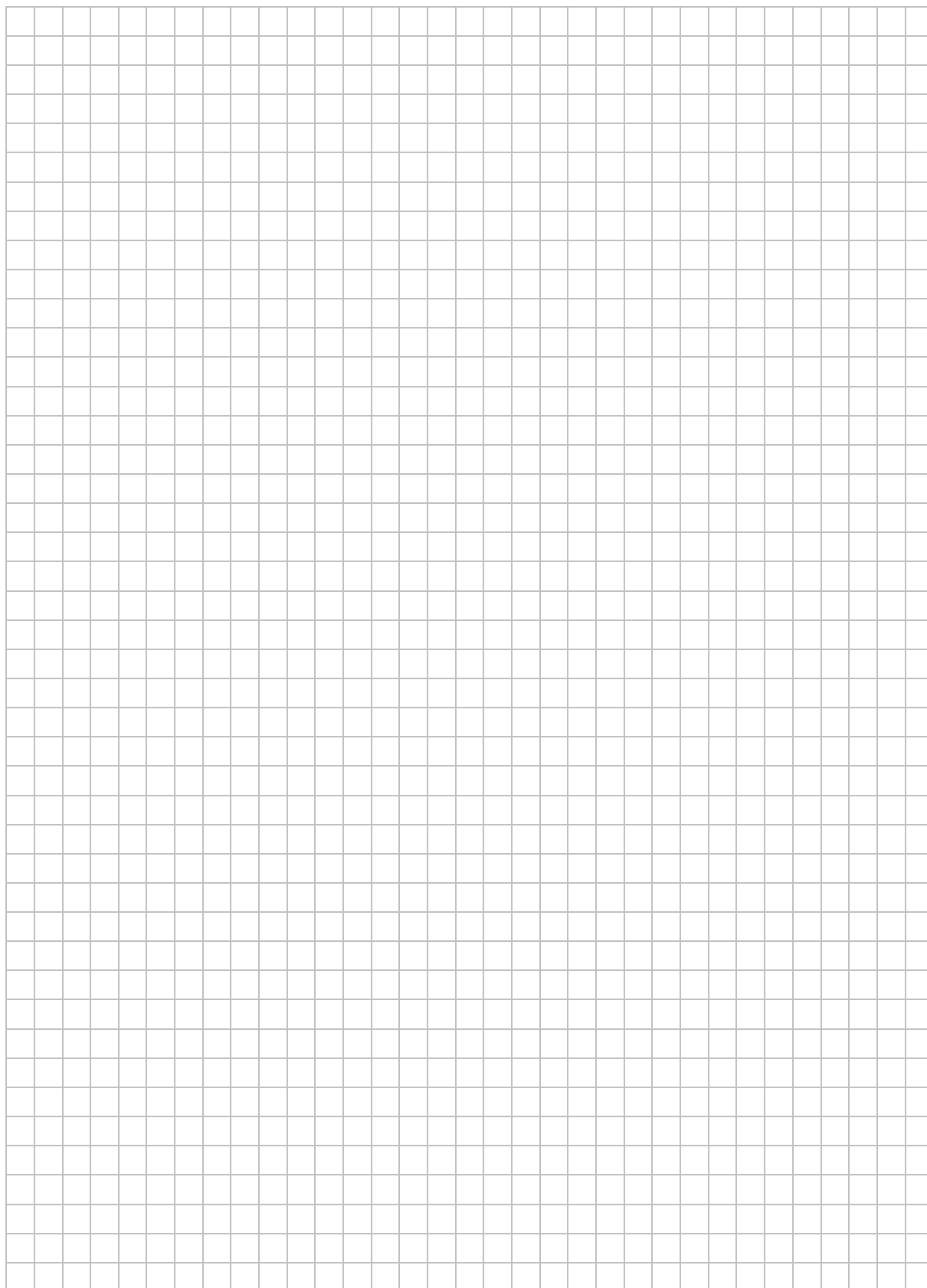
Zadanie 12. (0–6)

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.



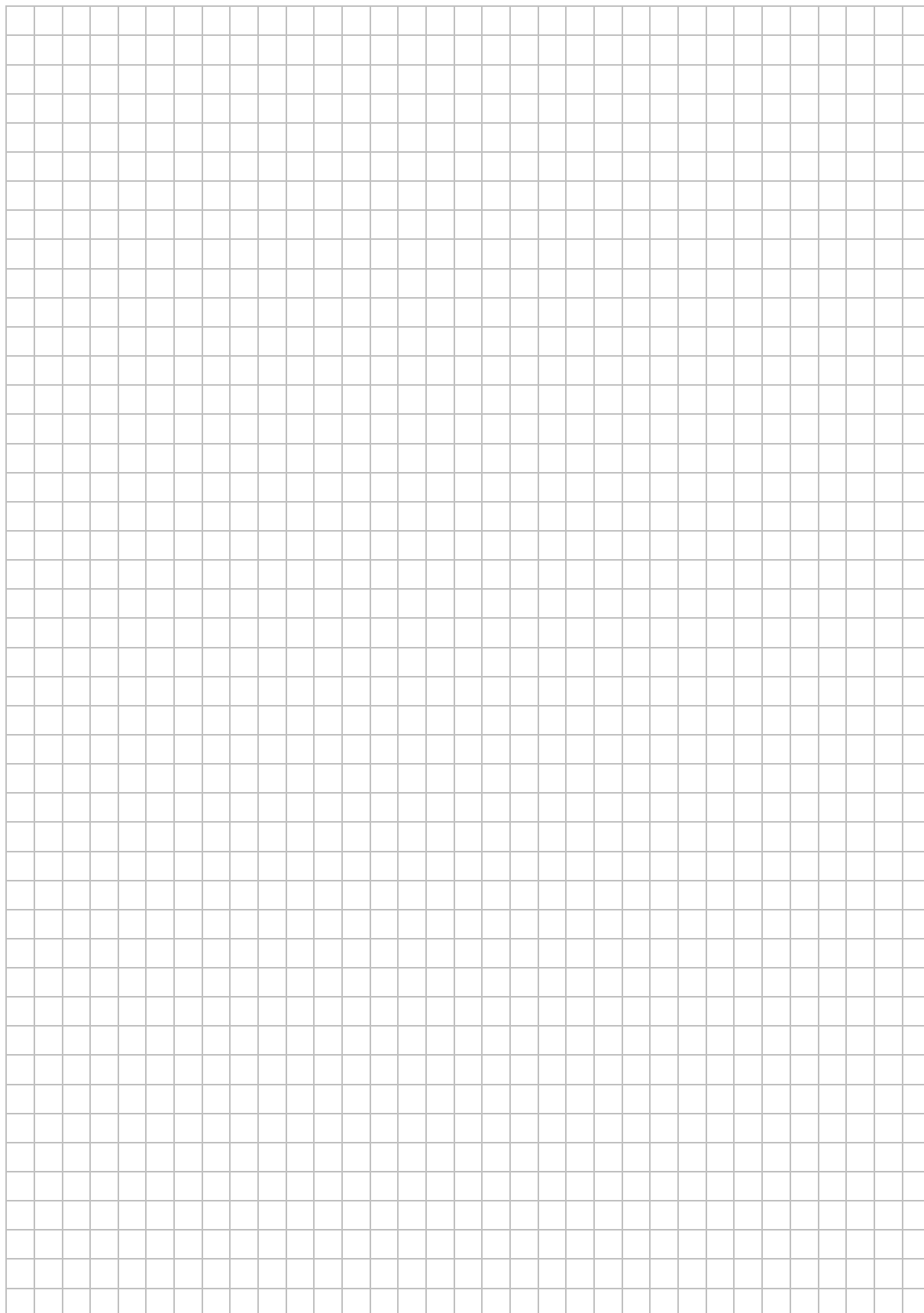
Zadanie 13. (0–6)

Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$.



Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x) \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{1}{2} \sin x$.



Zadanie 15. (0–7)

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V=2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

