

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Parametr m dobrano tak, że każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania

$$(4 - m^2) \cdot x = m^2 - 3m + 2$$

z niewiadomą x . Wynika stąd, że

- A. $m = -2$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = 4$

Zadanie 2. (0–1)

Dane są trzy niewspółliniowe punkty: $A = (1, 1)$, $B = (6, 3)$, $C = (4, 5)$. Ile jest wszystkich punktów D takich, że czworokąt o wierzchołkach w punktach A , B , C , D jest równoległobokiem?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadanie 3. (0–1)

Wiadomo, że wielomian $15x^5 - 133x^4 + 383x^3 - 499x^2 + 146x + 120$ ma w zbiorze $\{\frac{7}{6}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{9}{5}\}$ dokładnie jeden pierwiastek wymierny. Jest nim liczba

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{8}{7}$ D. $\frac{9}{5}$

Zadanie 4. (0–1)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony w następujący sposób: $a_1 = \frac{3}{5}$ oraz

$a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n$ dla $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{9}{10}$ D. $\frac{9}{5}$

Zadanie 5. (0–2)

W urnie znajduje się 16 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 10 kul białych i 6 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.

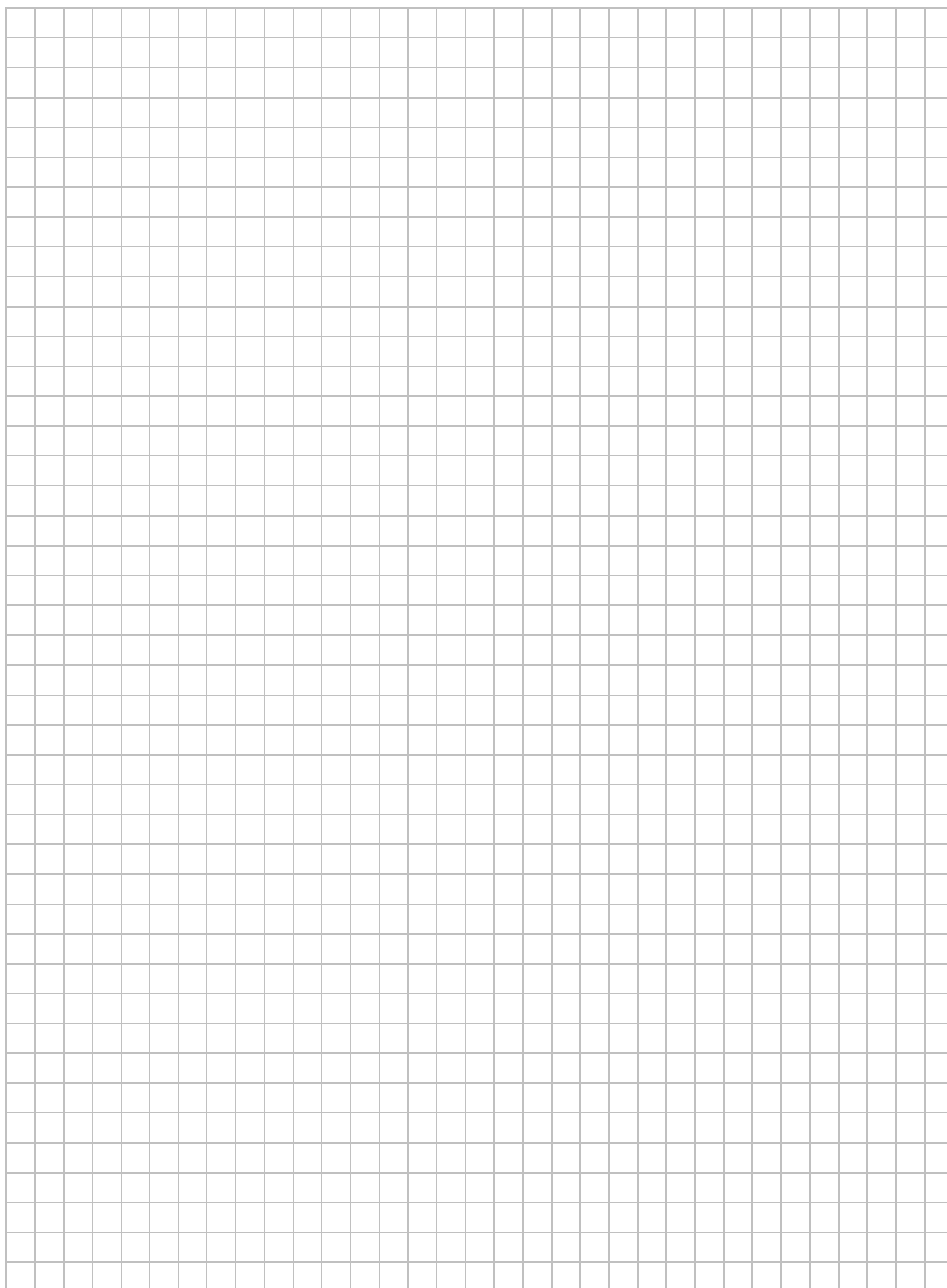
Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 6. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

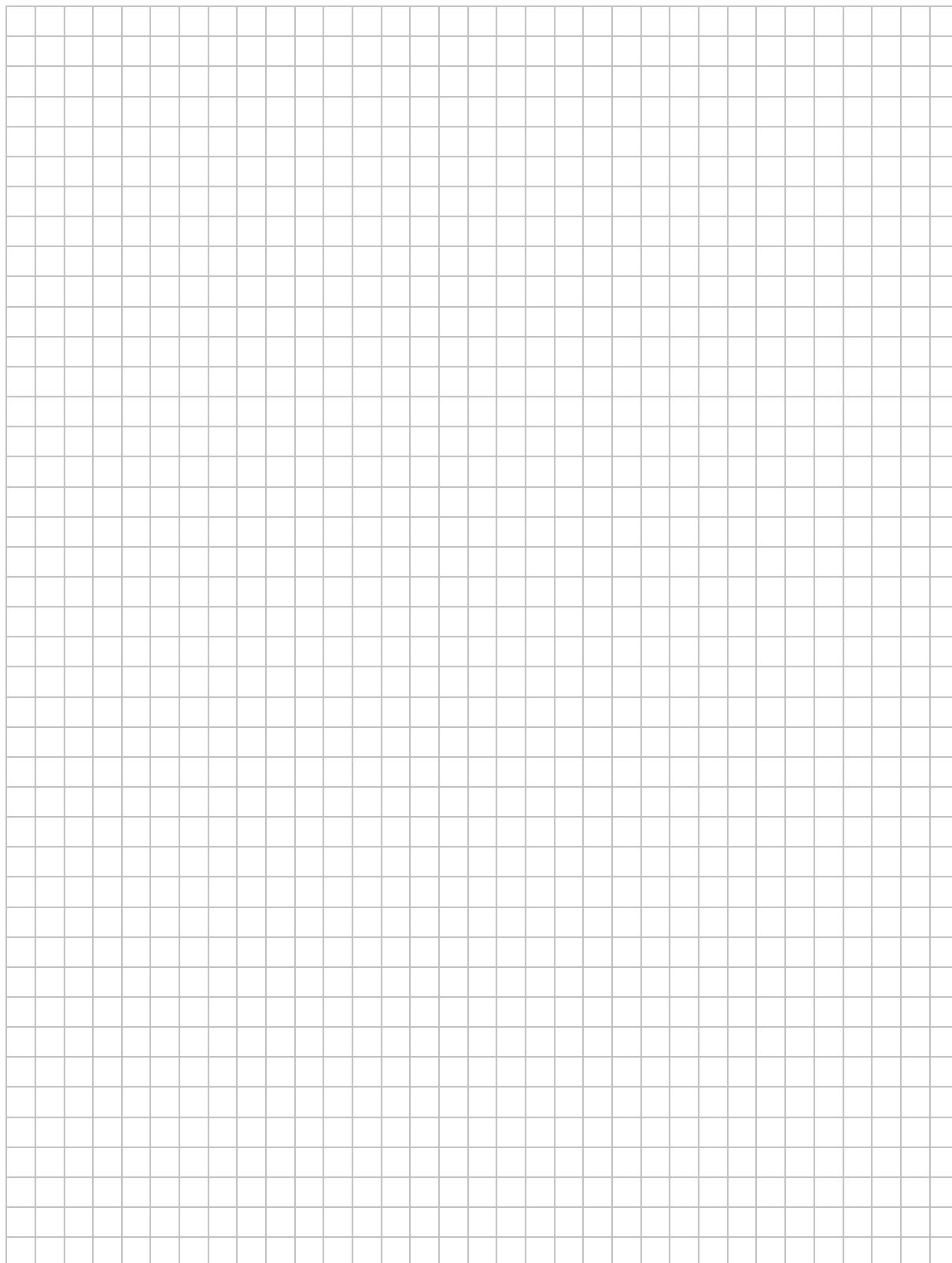
A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for calculations or drawing.

Odpowiedź:

Zadanie 7. (0–2)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{25x^2 - 9}{x^2 + 2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

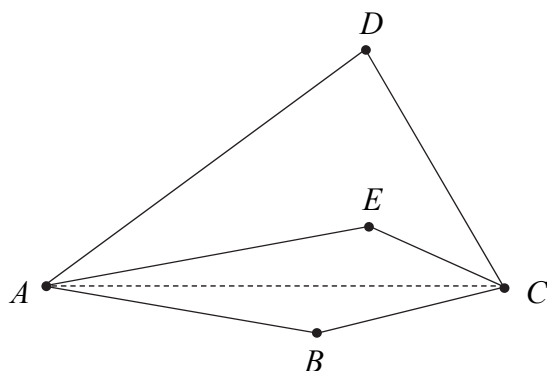
Oblicz wartość $f'(10)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.



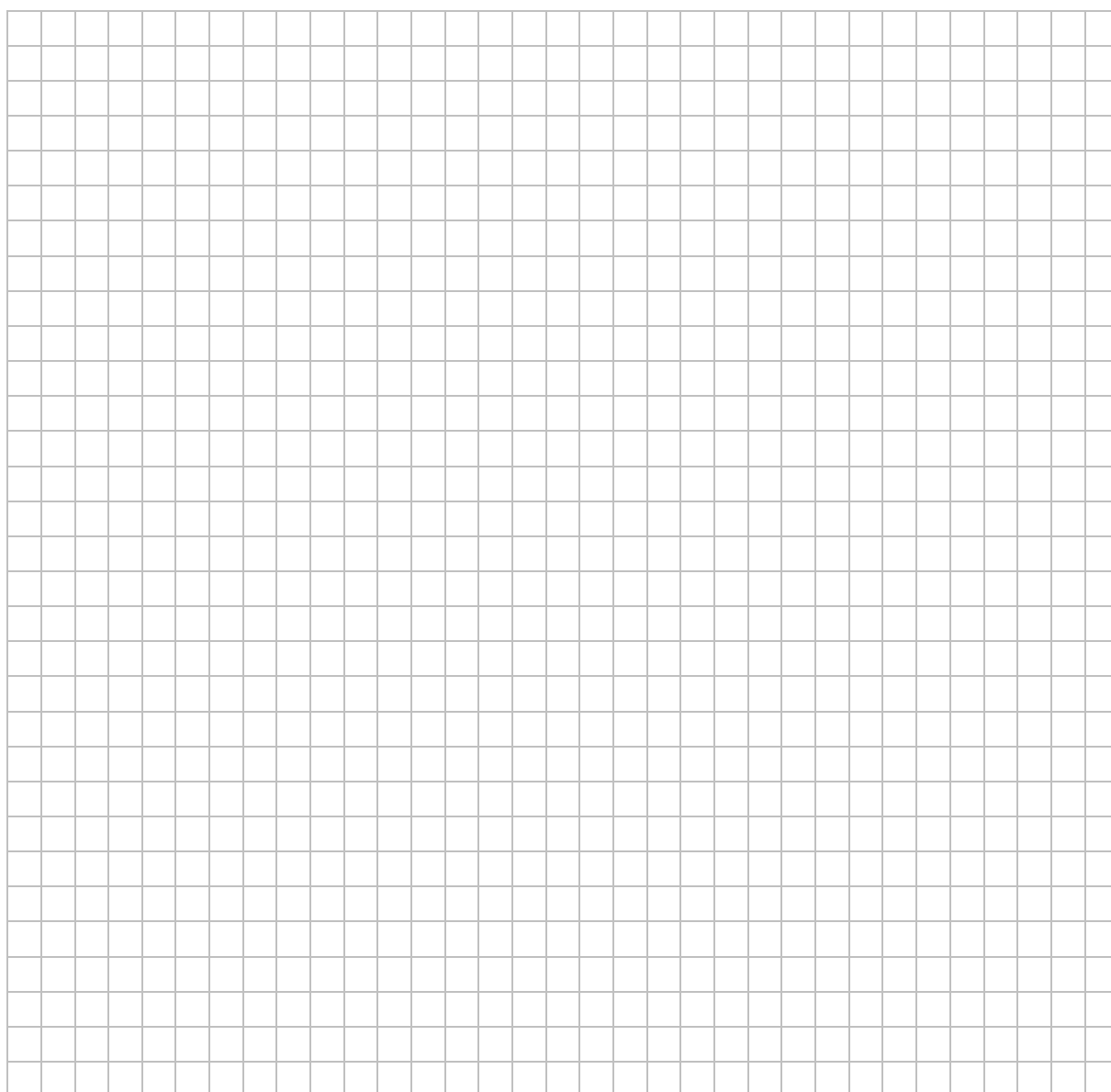
Odpowiedź:

Zadanie 8. (0–3)

Dwusieczne kątów BAD i BCD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E , przy czym punkty B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC (zobacz rysunek).

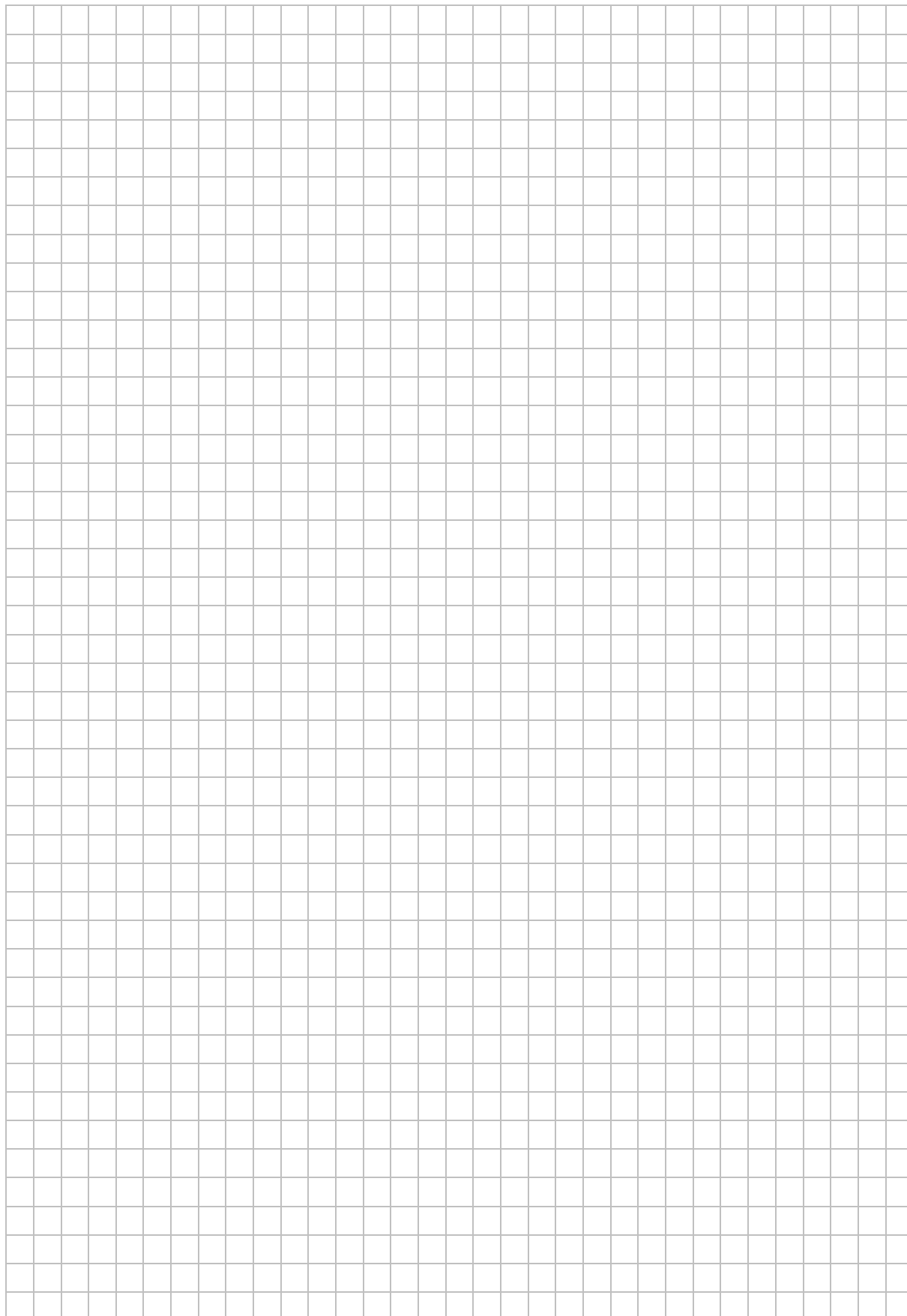


Wykaż, że $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2 \cdot |\sphericalangle AEC| = 360^\circ$.



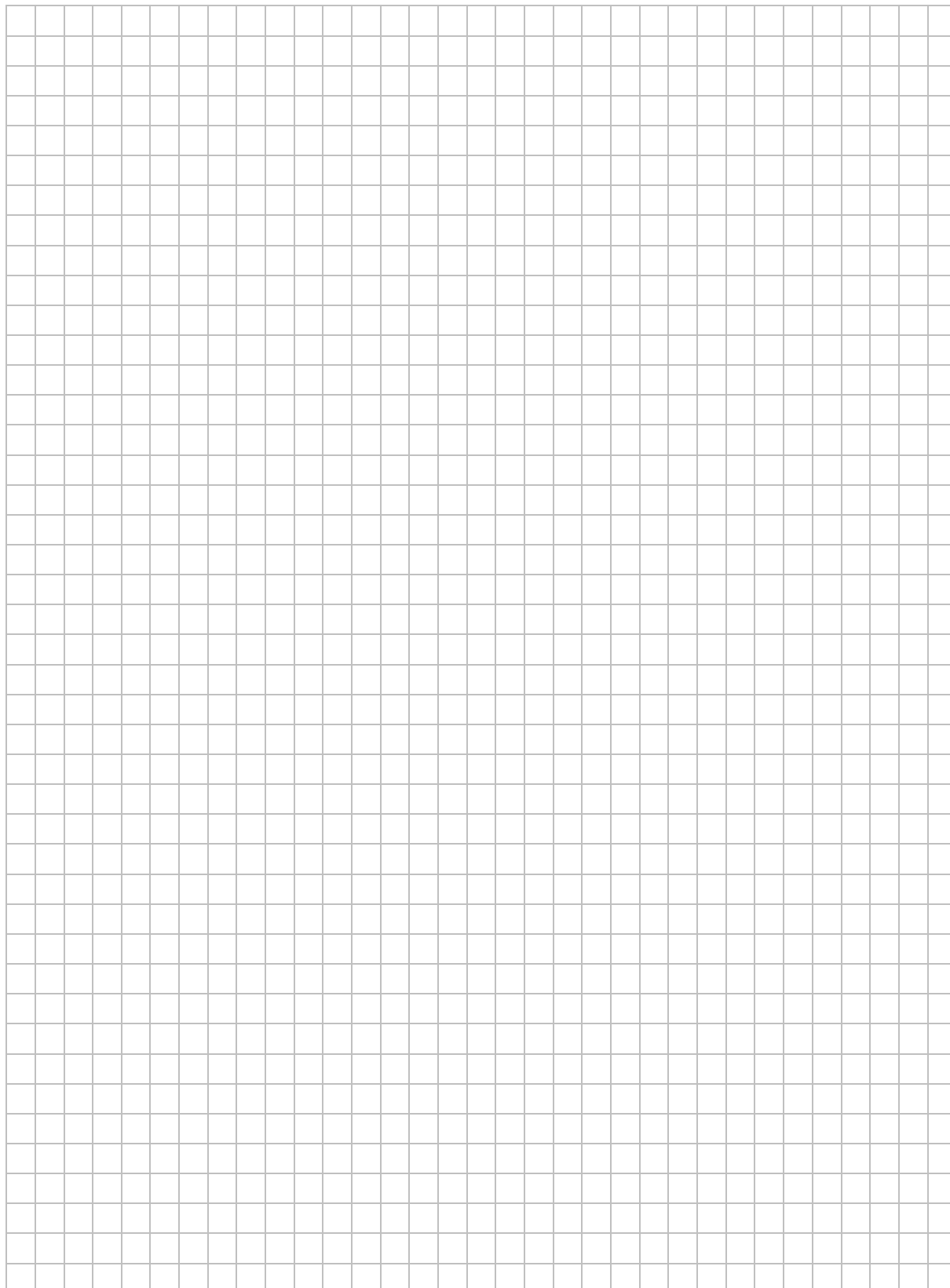
Zadanie 9. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.



Zadanie 10. (0–4)

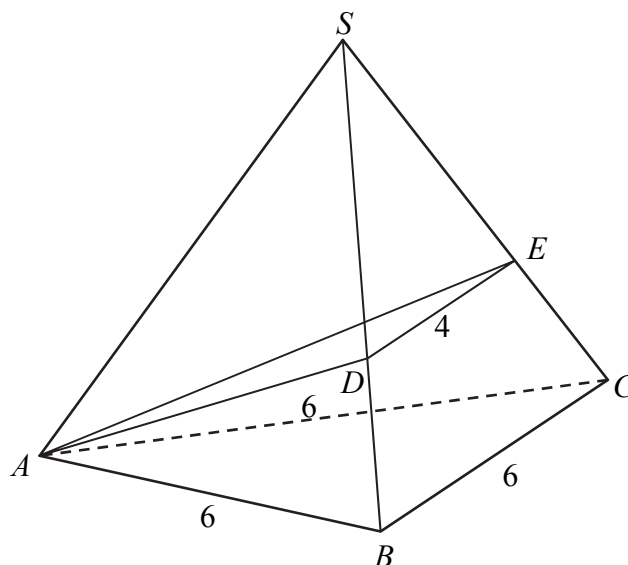
Miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego jest o 2° mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n+2)$ -kąta foremnego. Oblicz n .



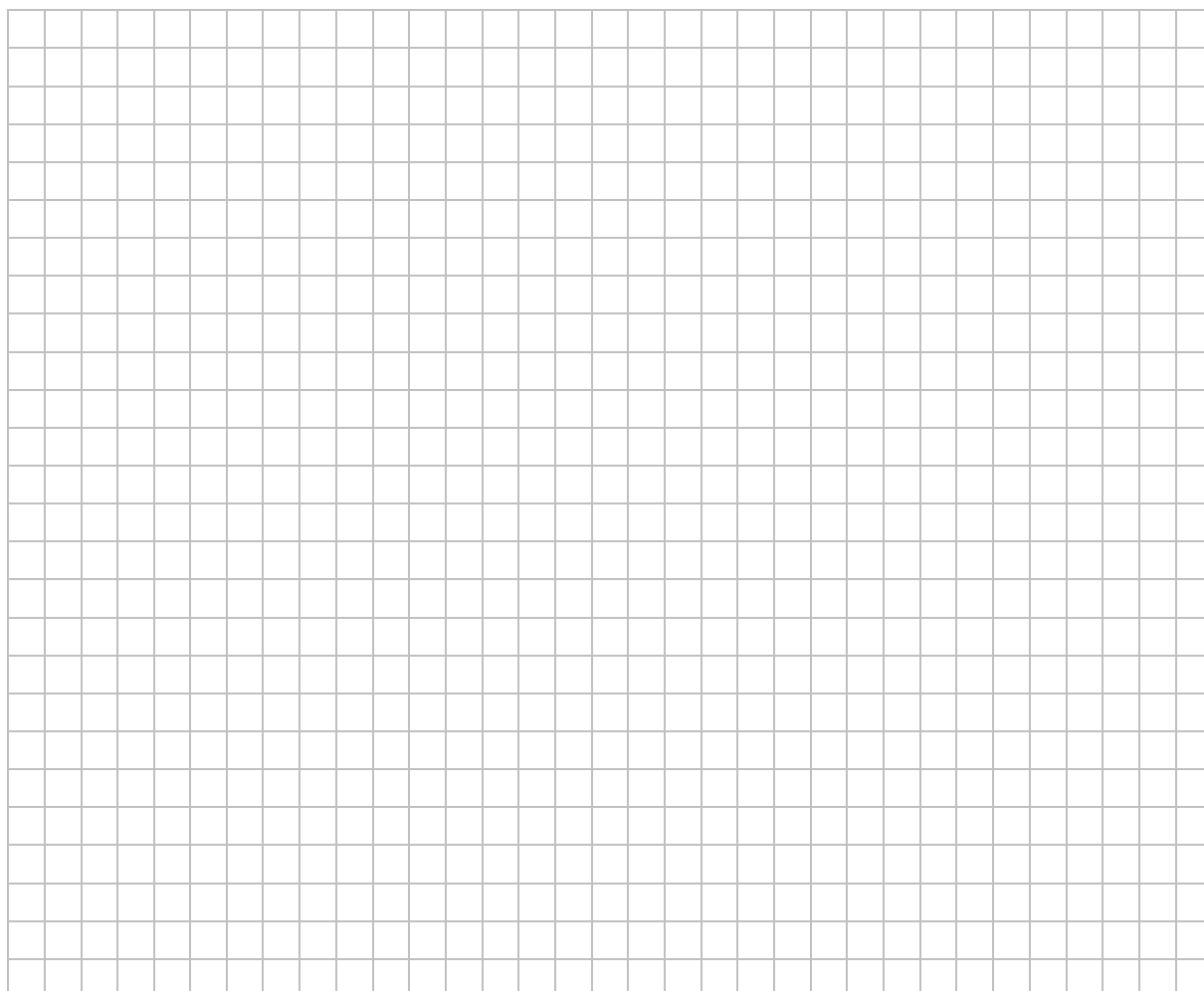
Odpowiedź:

Zadanie 11. (0–6)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E , takie że $|BD| = |CE|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

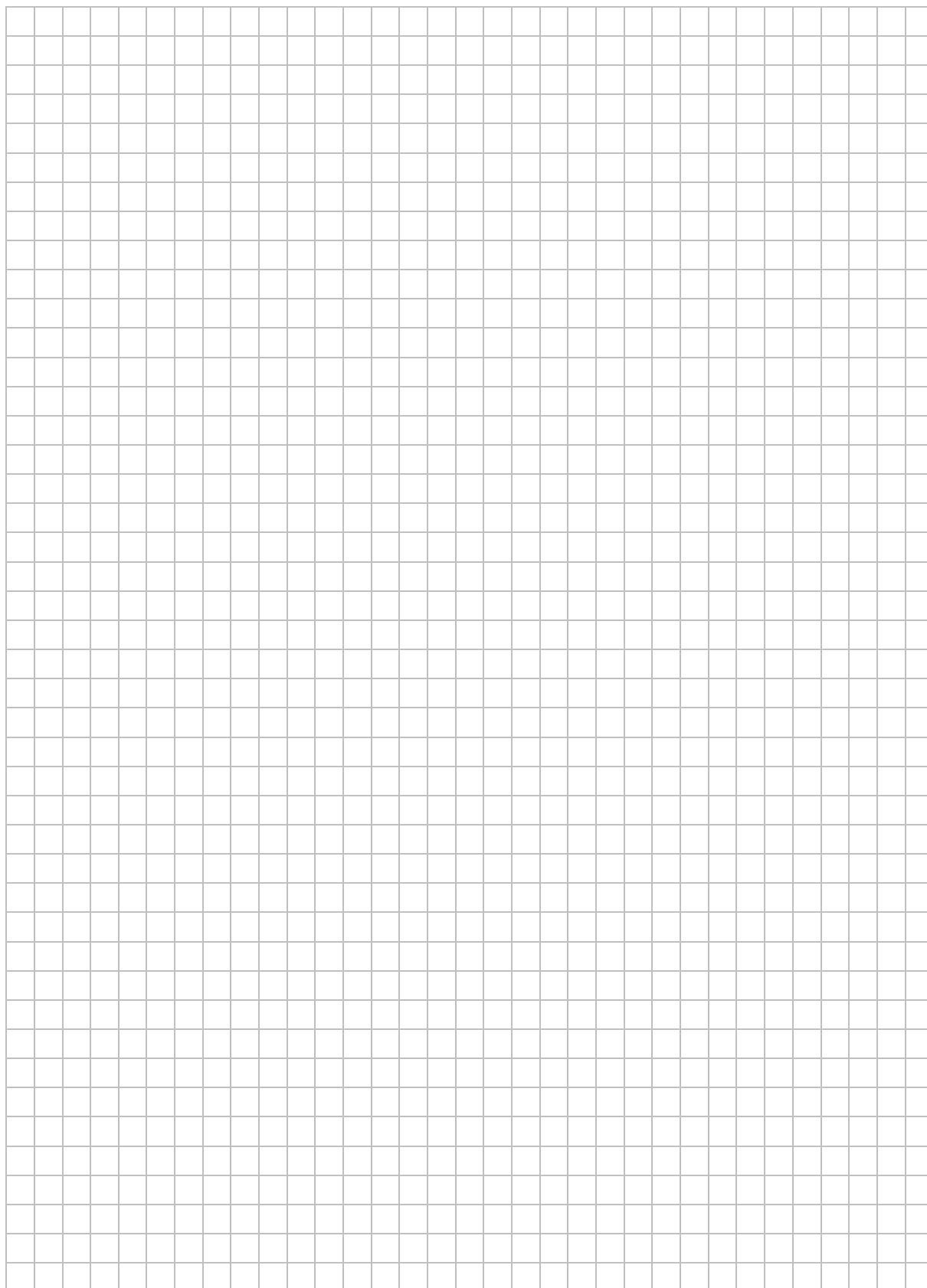


Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

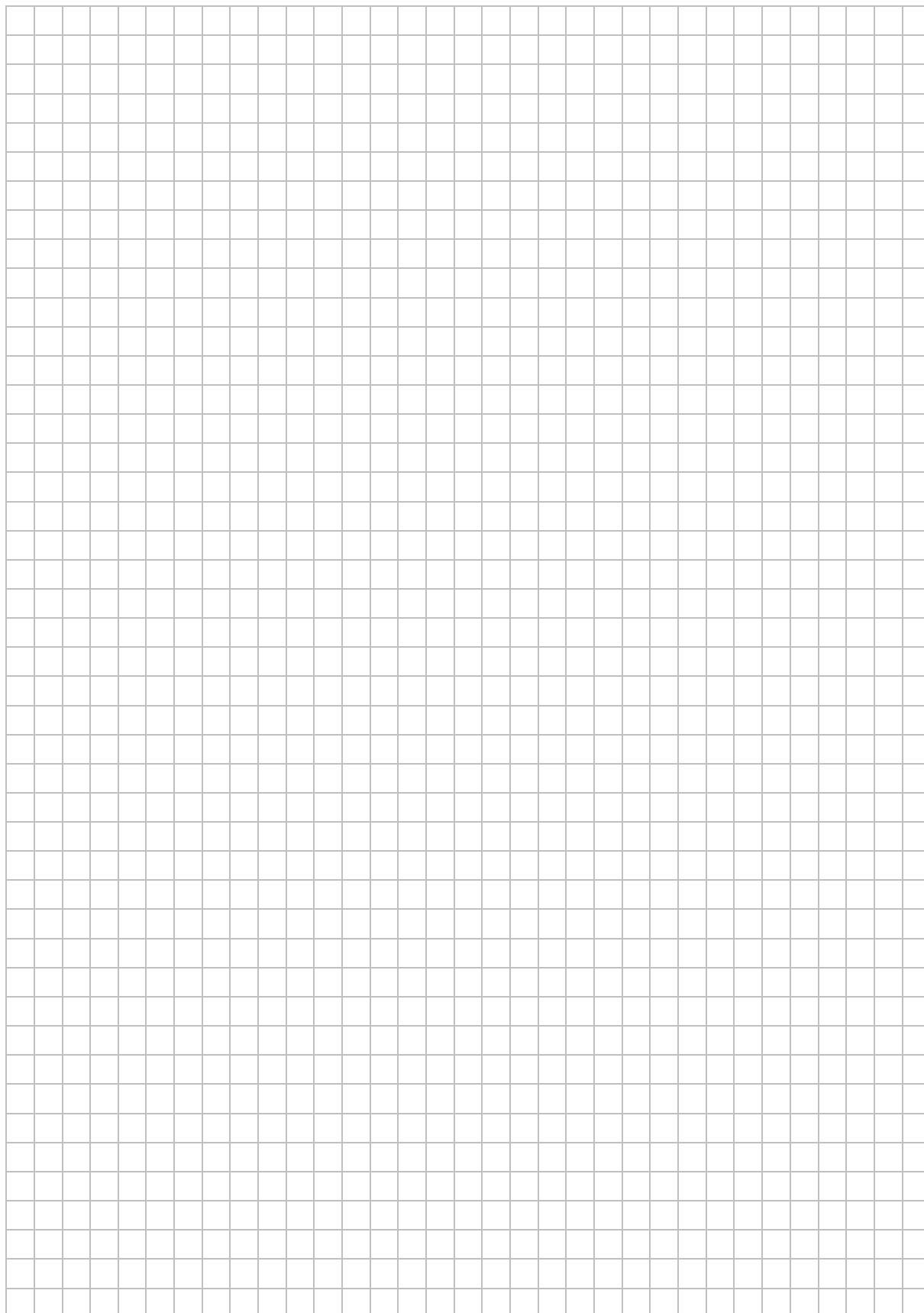
$$4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$.



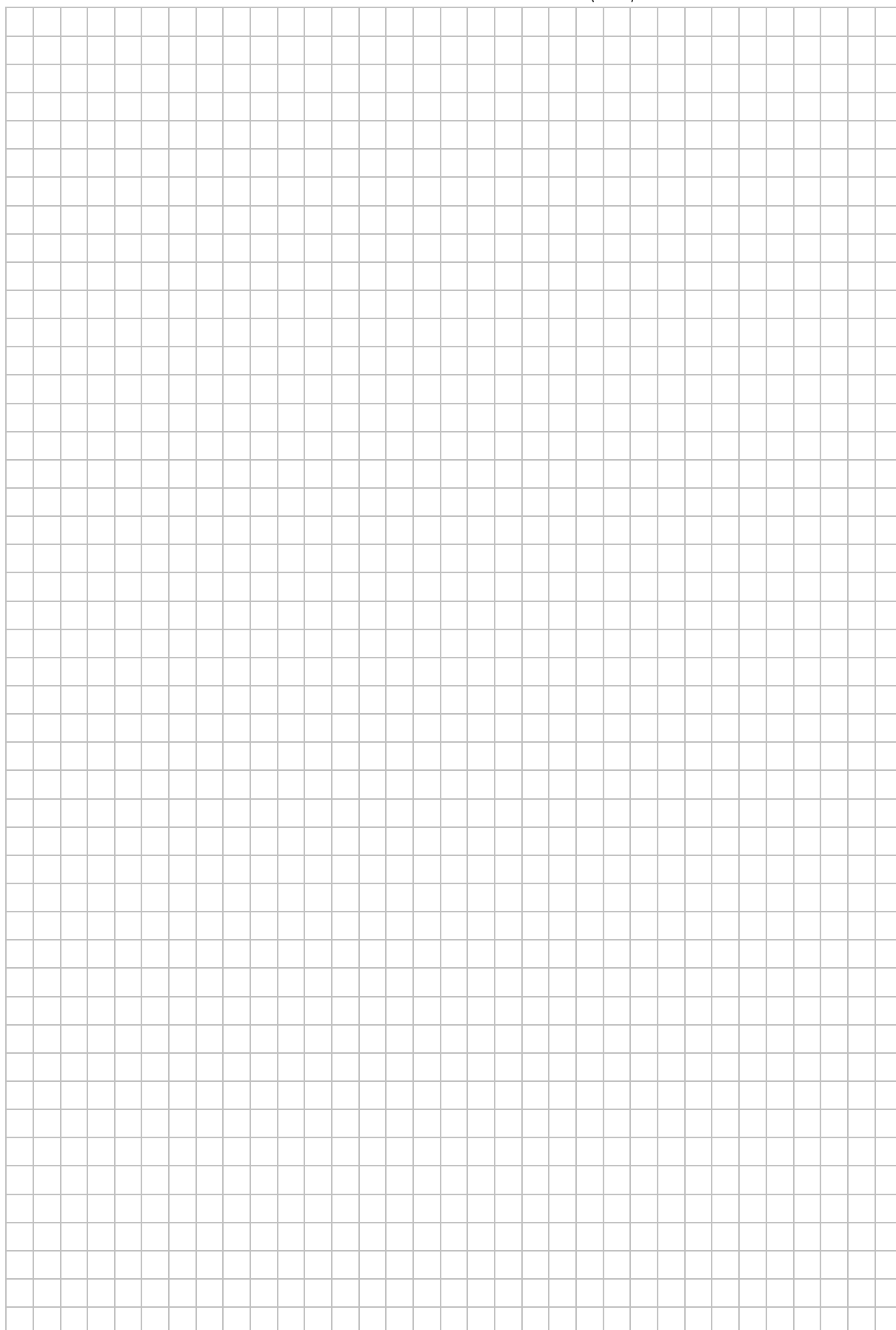
Zadanie 13. (0–6)

Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz długość boku tego rombu.



Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $4\sin 7x \cos 2x = 2\sin 9x - 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.



Zadanie 15. (0–7)

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p – jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x . Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

