

W zadaniach od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Dane są liczby: $a = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $b = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c = \sqrt[4]{8}$, $d = \frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ oraz $k = 2^{-\frac{1}{4}}$. Prawdziwa jest równość

- A. $k = a$ B. $k = b$ C. $k = c$ D. $k = d$

Zadanie 2. (0–1)

Równanie $||x| - 2| = |x| + 2$

- A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 3. (0–1)

Wartość wyrażenia $2 \log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$ jest równa

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x+2}{x^2-5x+6}$ jest równa

- A. $-\infty$ B. -1 C. 0 D. $+\infty$

Zadanie 5. (0–2)

Punkt $A = (-5, 3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem

$f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$. Oblicz iloraz $\frac{d}{a}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

[illegible]

Zadanie 6. (0–3)

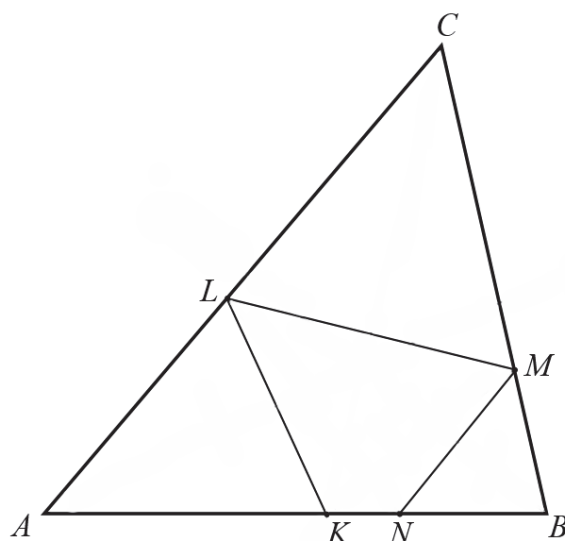
Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem 30° . Oblicz współrzędne punktu P .

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Odpowiedź:

Zadanie 7. (0–3)

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC| > |BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K . Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC , punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB , a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



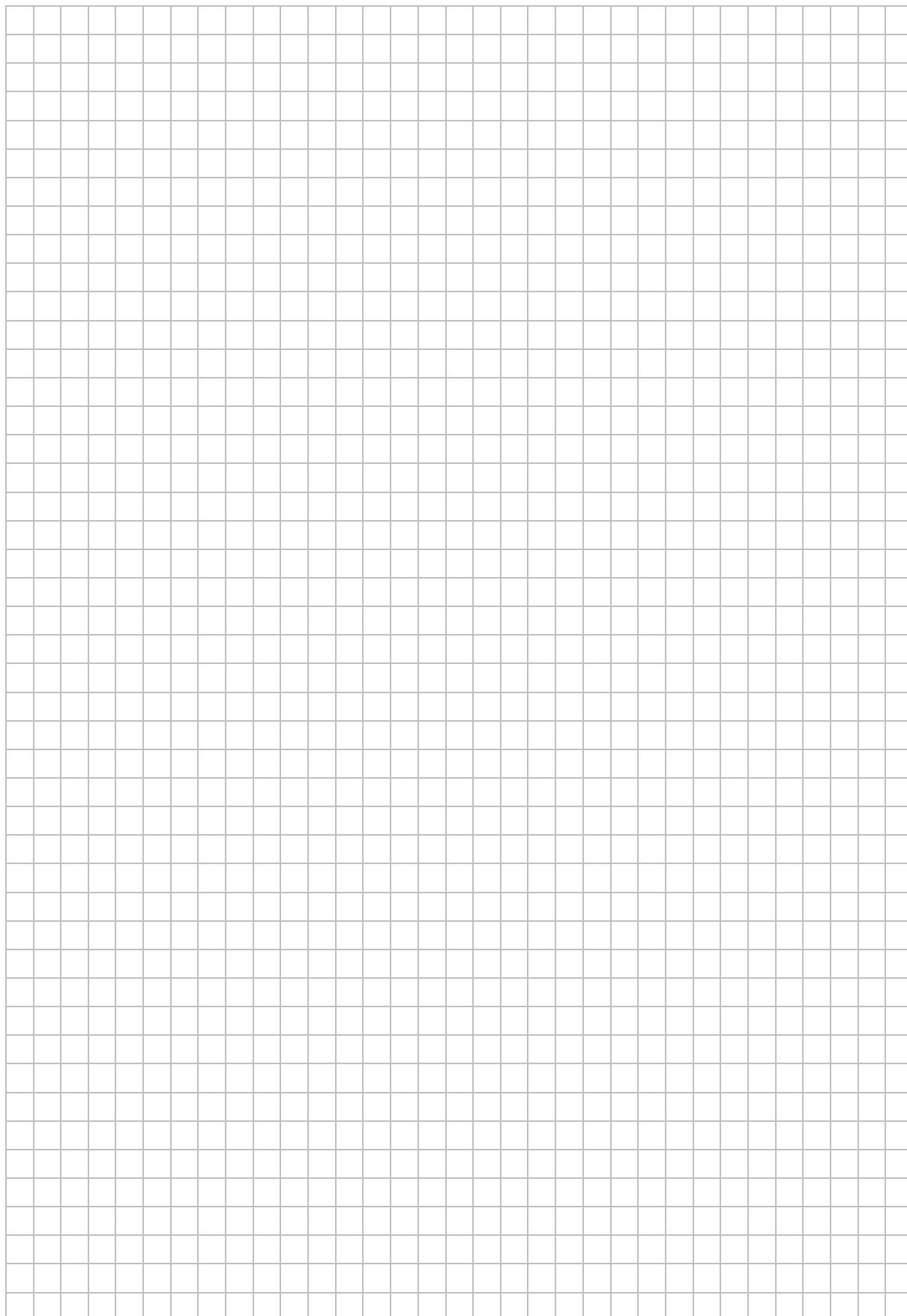
Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.



Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.	7.
	Maks. liczba pkt	2	3	3
	Uzyskana liczba pkt			

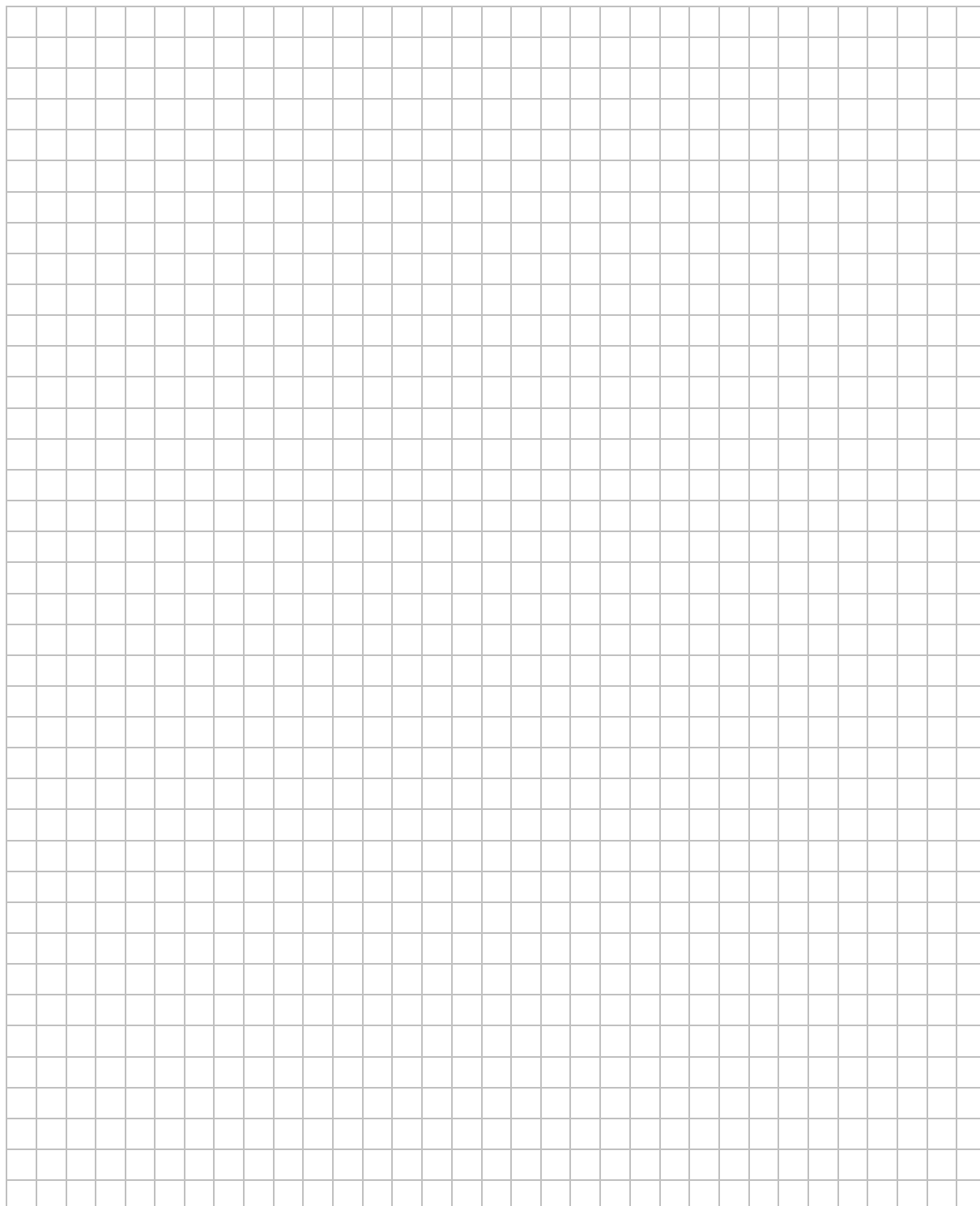
Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.



Zadanie 9. (0–4)

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

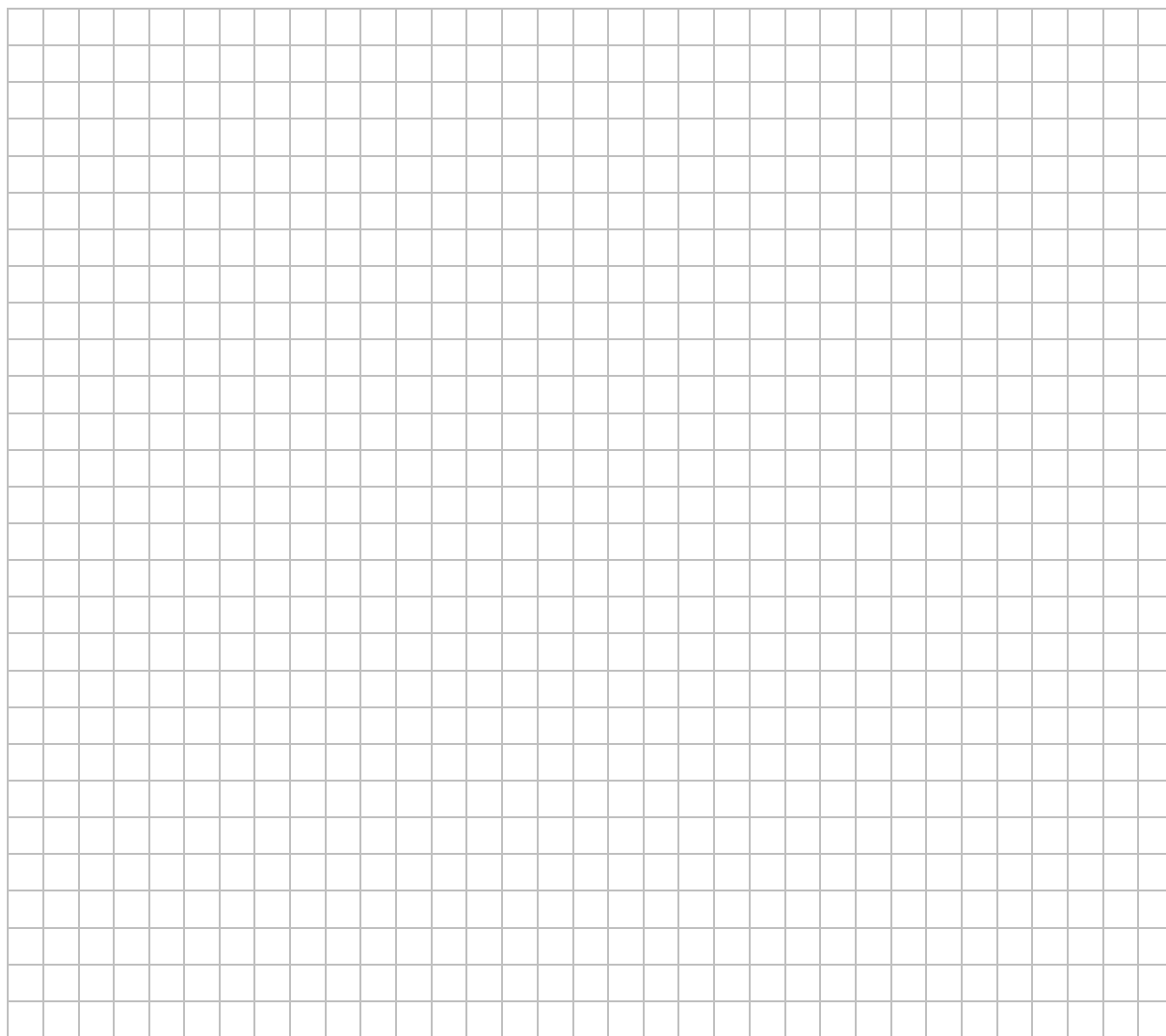
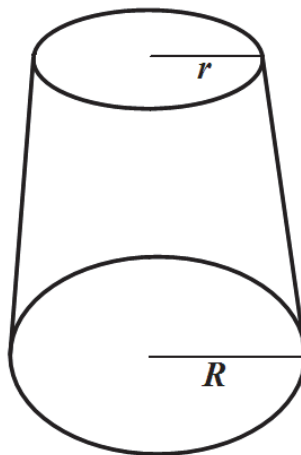


Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–4)

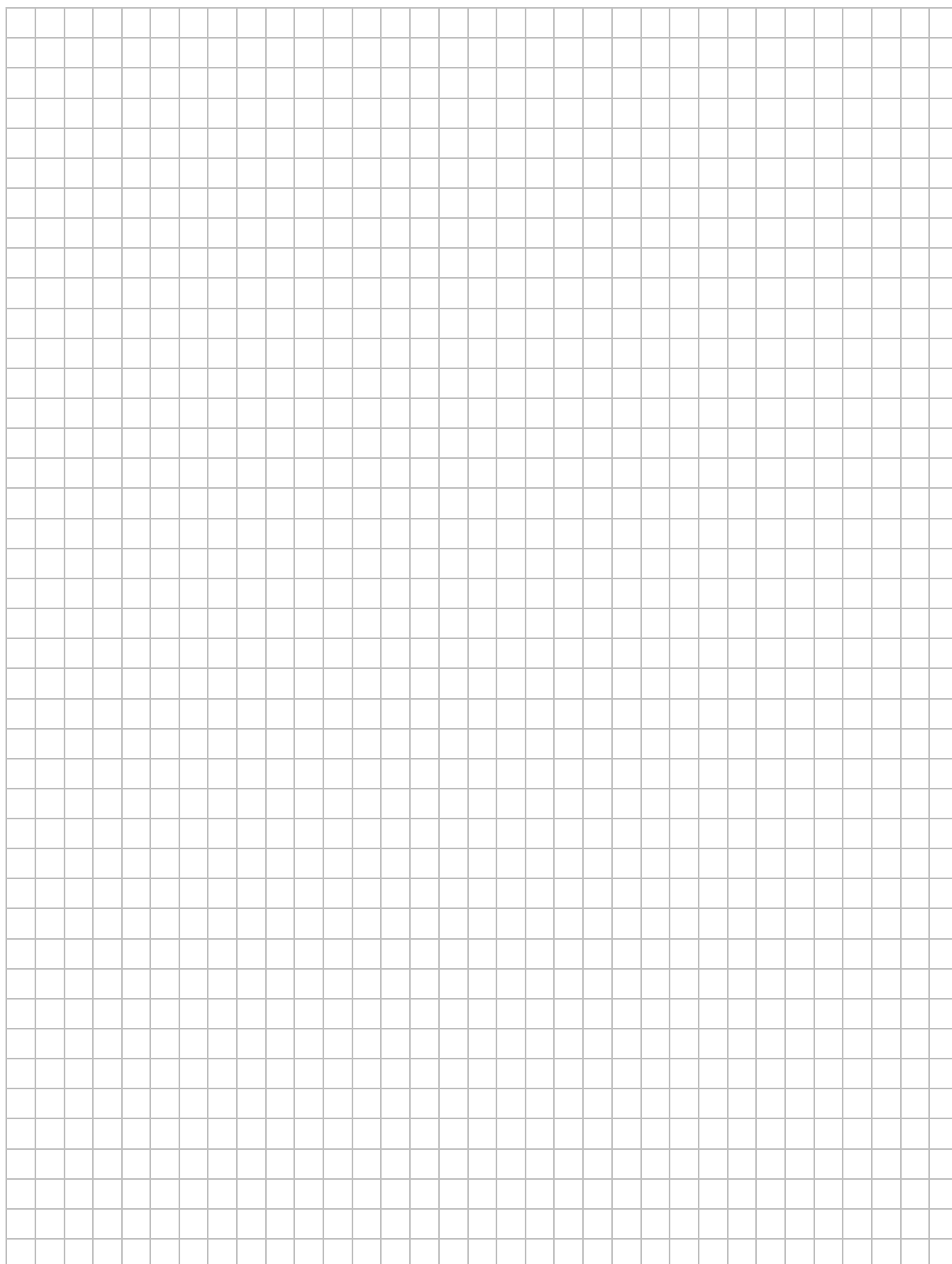
Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie r i R są promieniami podstaw ($r < R$), a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π , a $r = 6$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.



Odpowiedź:

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2 \sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

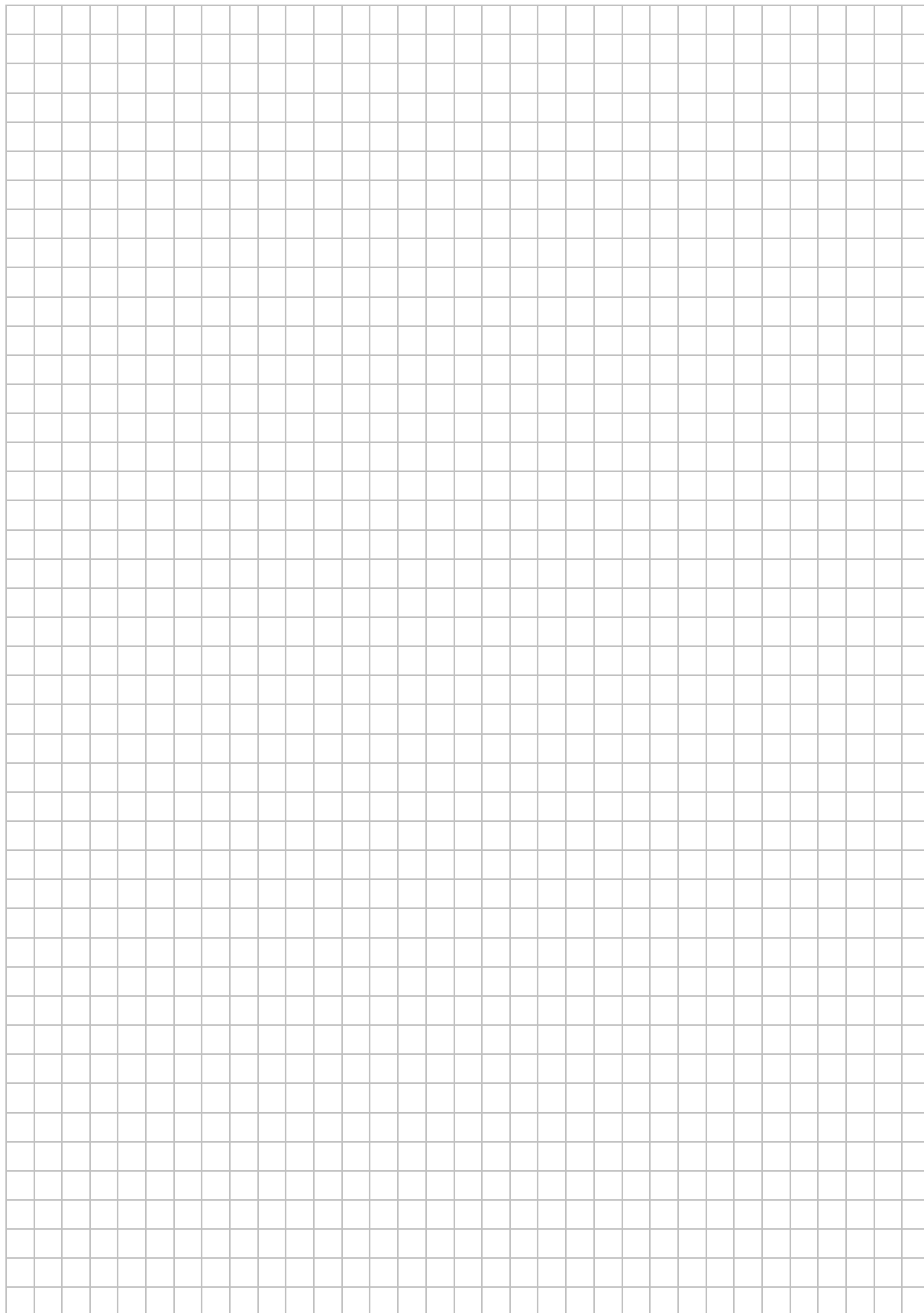


Odpowiedź:

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.	11.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.

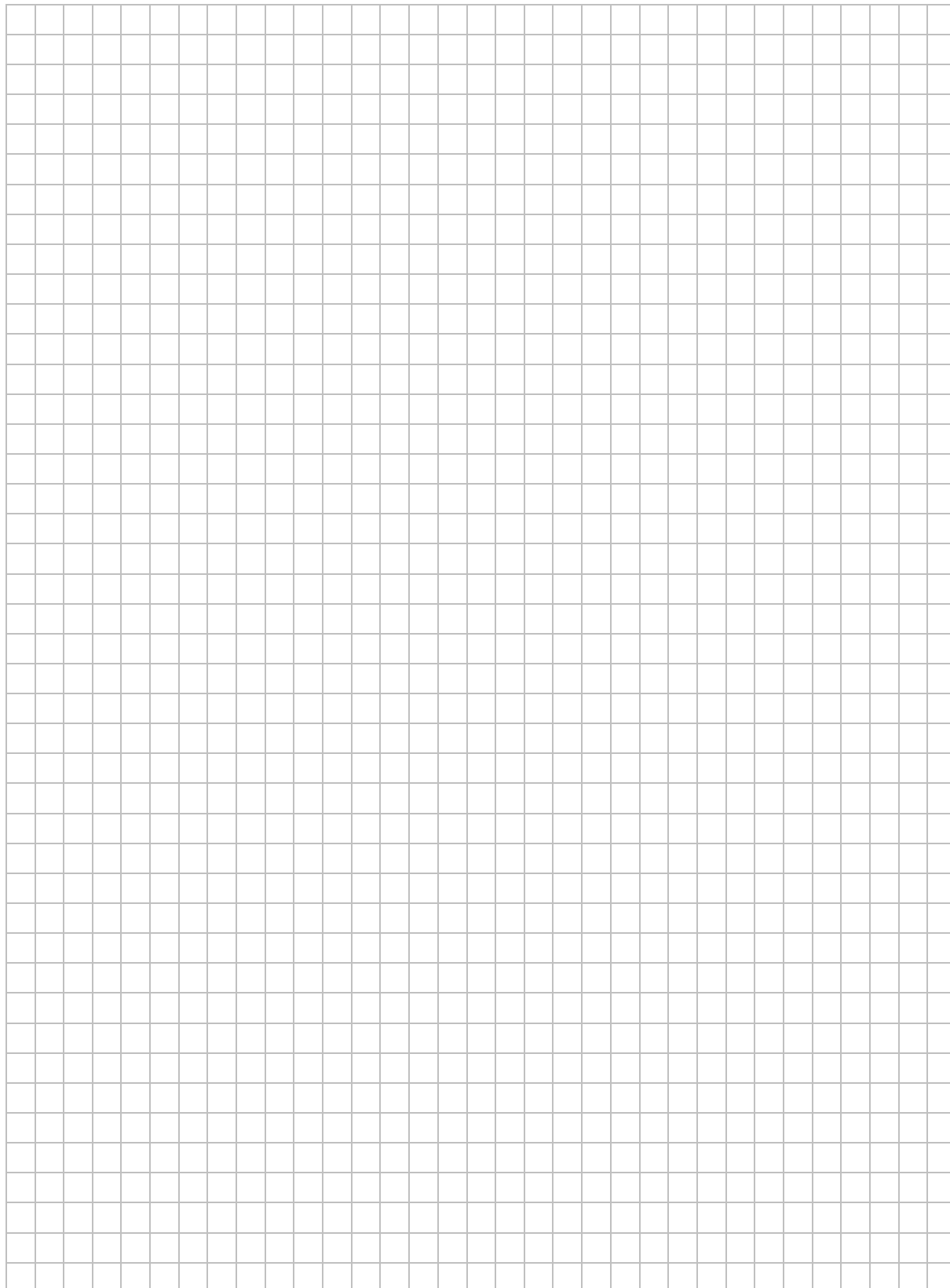


Zadanie 13. (0–4)

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

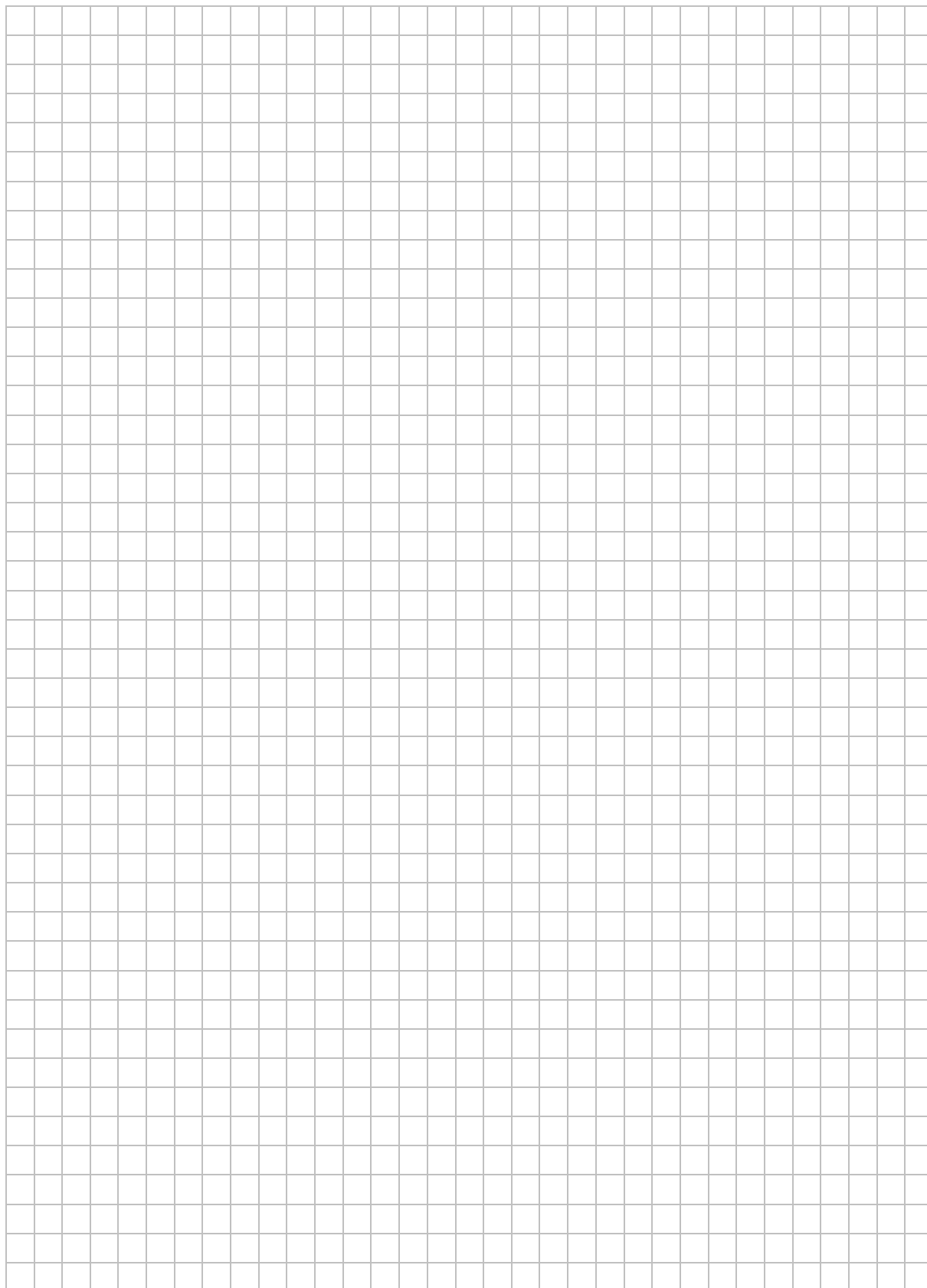
$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.



Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$.
Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

- a) Wyznacz wszystkie wartości a , dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
- b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$.
- c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

