

W zadaniach od 1. do 5. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Równanie $\|x - 4| - 2| = 2$ ma dokładnie

- A. dwa rozwiązania rzeczywiste.
- B. jedno rozwiązanie rzeczywiste.
- C. cztery rozwiązania rzeczywiste.
- D. trzy rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\log_4 25 + \log_2 10$ jest równa

- A. $\log_2 15$ B. $\log_2 50$ C. $\log_2 210$ D. $\log_2 635$

Zadanie 3. (0–1)

Punkt $P' = (3, -3)$ jest obrazem punktu $P = (1, 3)$ w jednokładności o środku w punkcie $S = (-2, 12)$. Skala tej jednokładności jest równa

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{5}{3}$ C. 2 D. 3

Zadanie 4. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x}{2x-8}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$.

Wówczas pochodna tej funkcji dla argumentu $x = \sqrt{2} + 4$ jest równa

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$ C. -1 D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 5. (0–1)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{7}{3}$ D. 7

Zadanie 6. (0–2)

Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -1$ i $x_2 = 12$. Oblicz największą wartość tej funkcji. Zakoduj kolejno, od lewej do prawej, cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

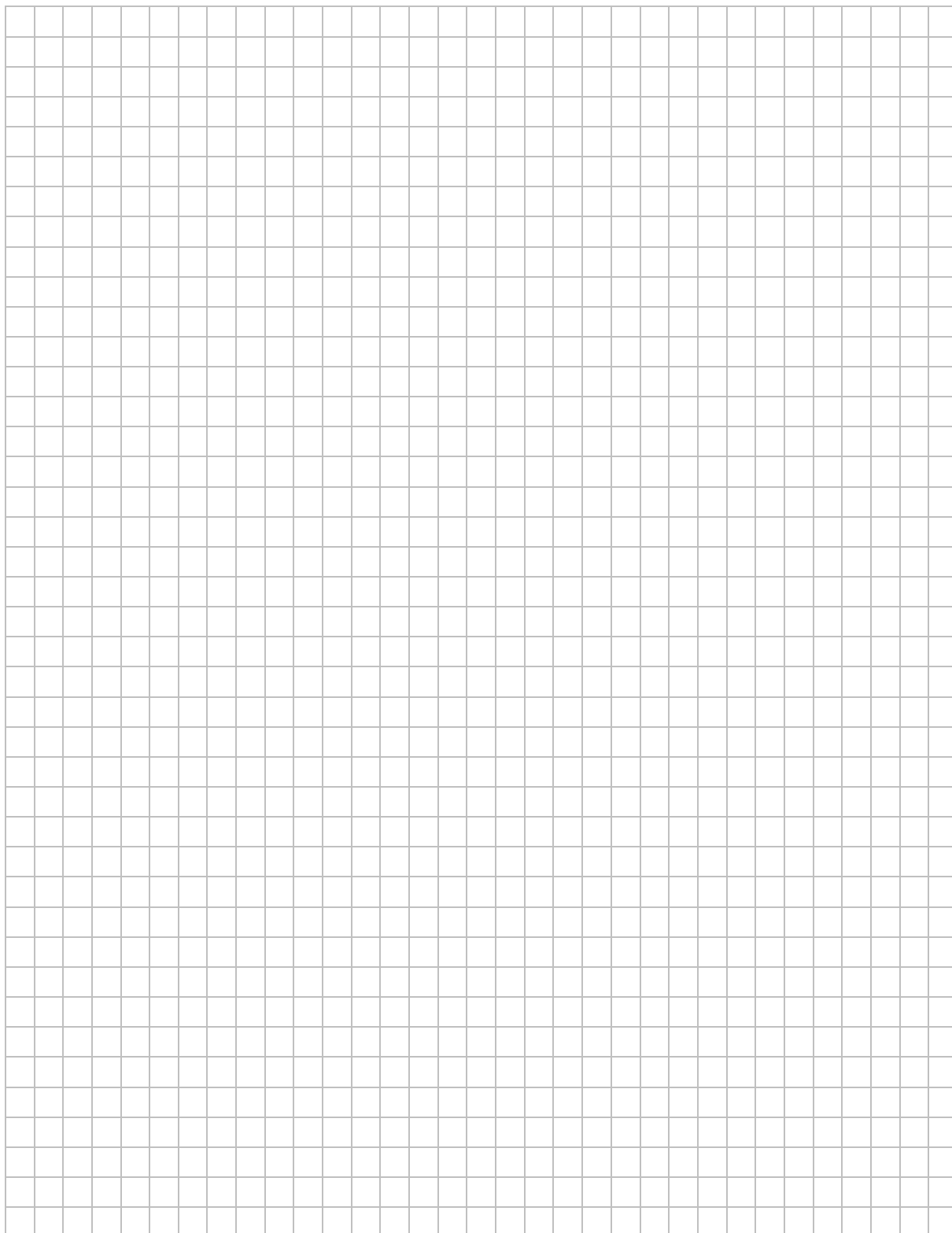
BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 7. (0–3)

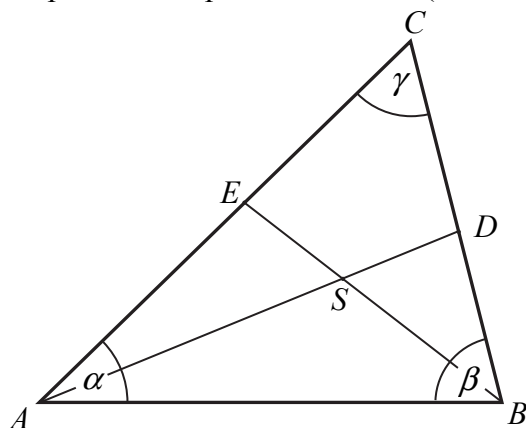
Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0.$$

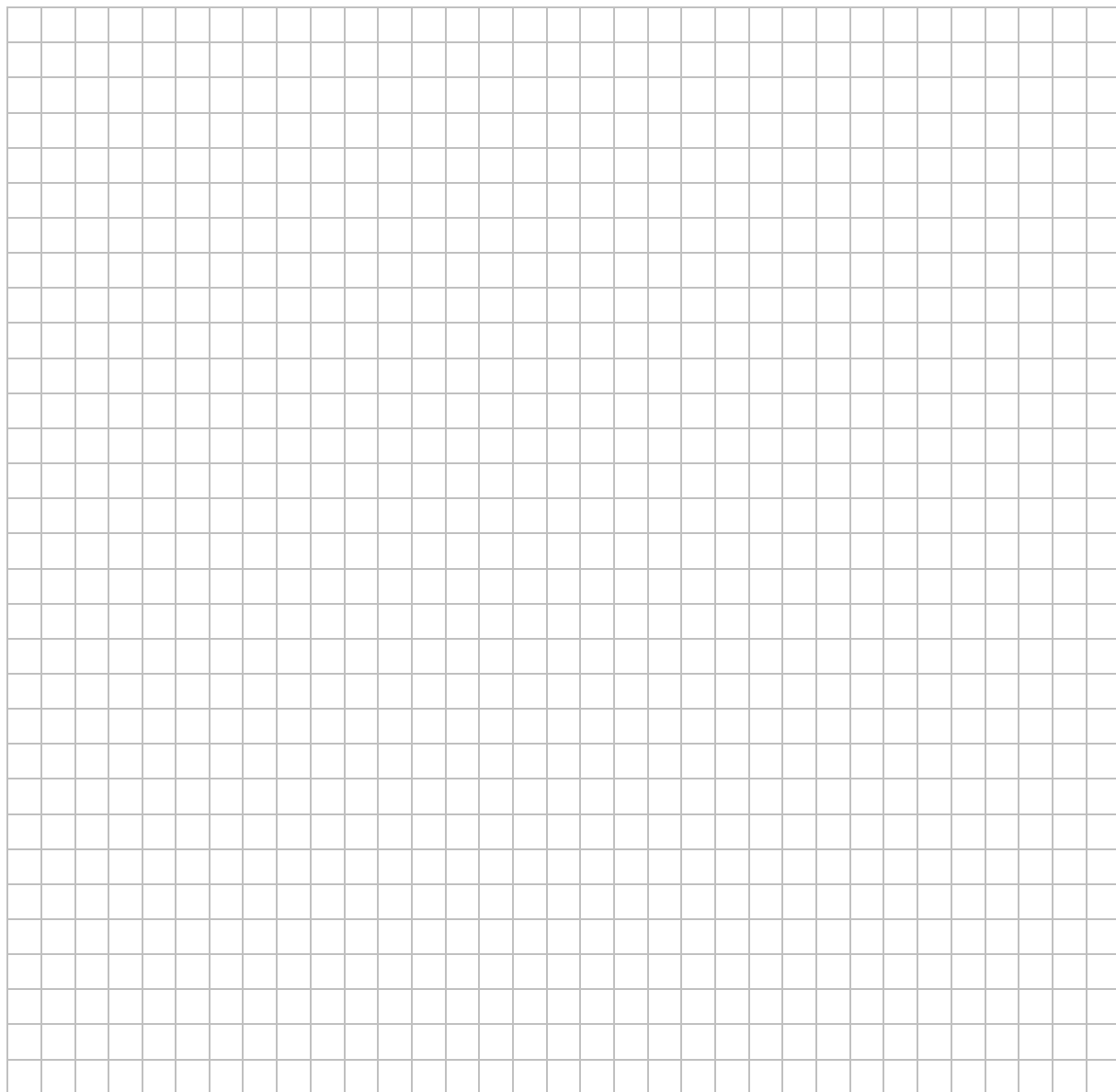


Zadanie 8. (0–3)

Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ i $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).

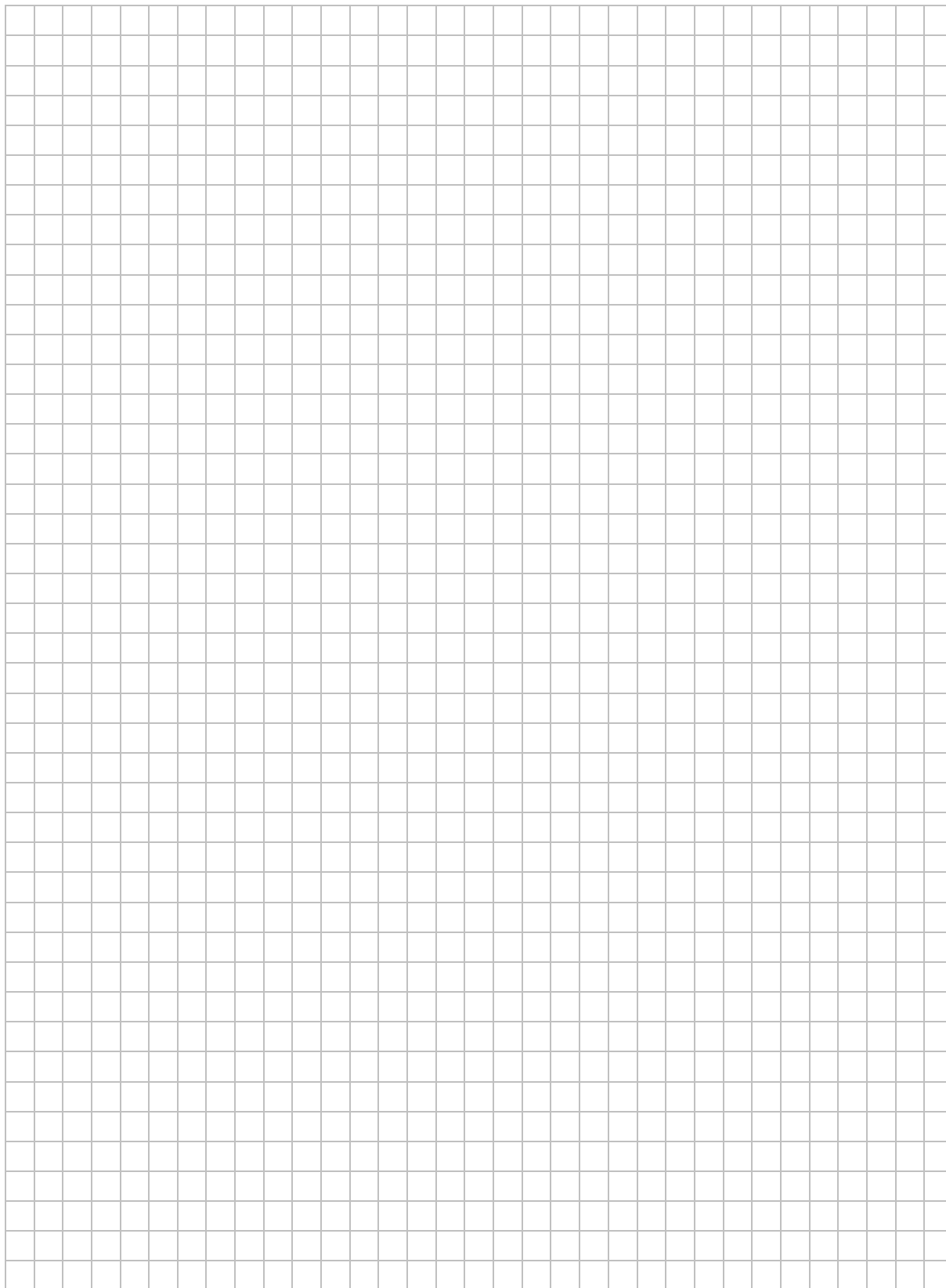


Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.



Zadanie 9. (0–4)

Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

A large grid of graph paper, consisting of 30 columns and 30 rows of small squares, intended for calculations or drawing.

Odpowiedź:

Zadanie 10. (0–5)

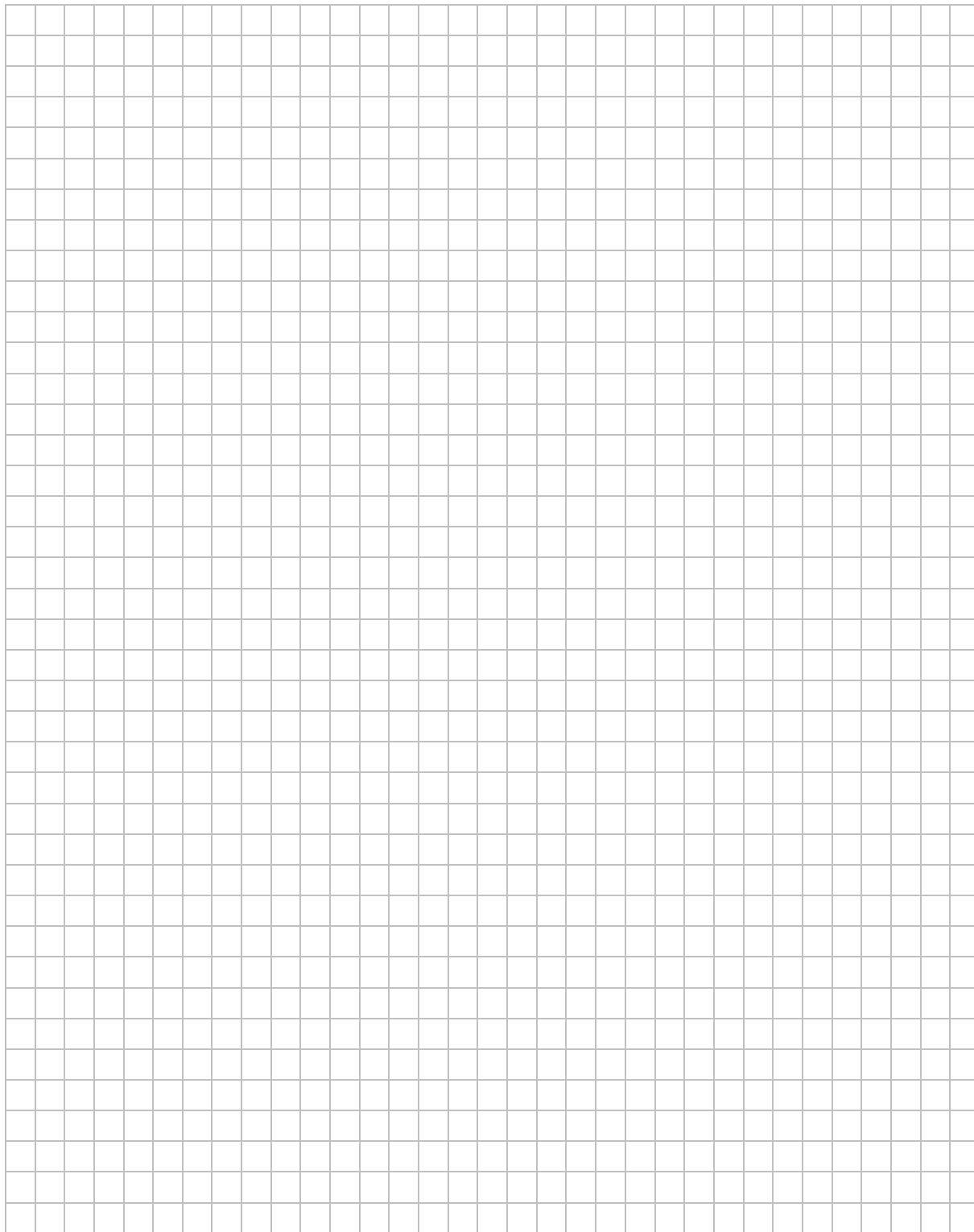
Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n) . Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

[illegible]

Odpowiedź:

Zadanie 11. (0–4)

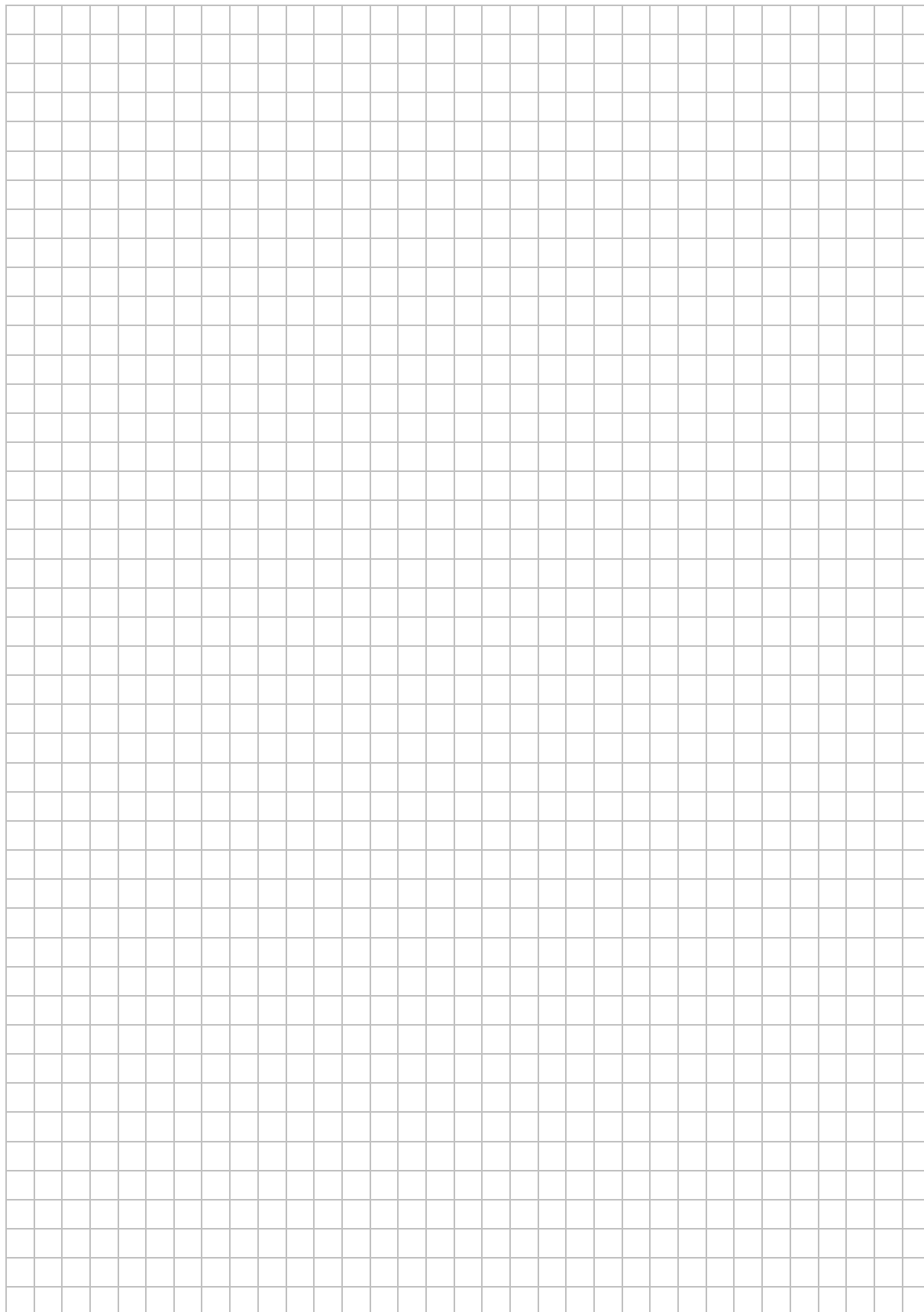
Rozwiąż równanie $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.



Odpowiedź:

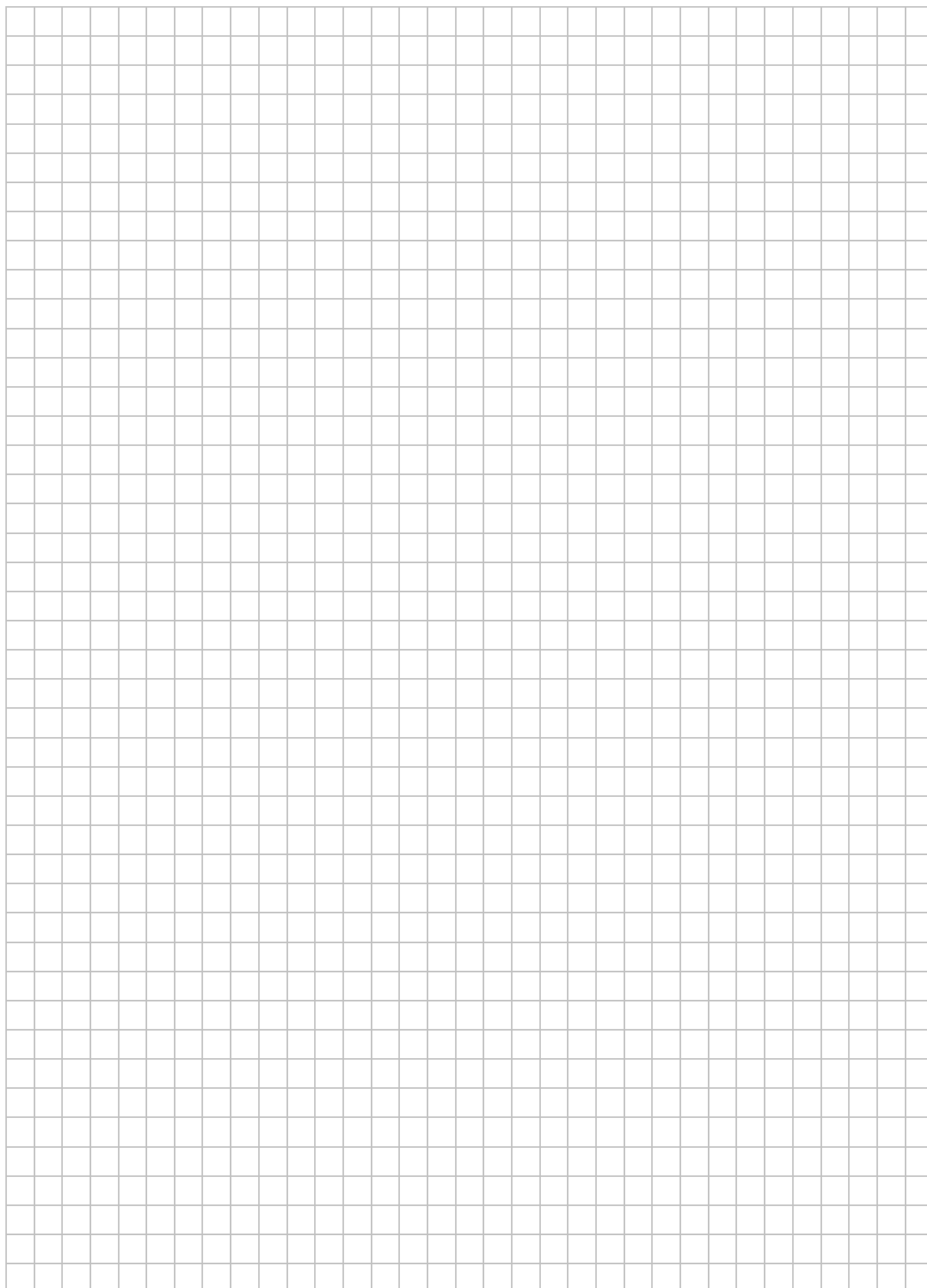
Zadanie 12. (0–5)

Prosta l , na której leży punkt $P=(8, 2)$, tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l .



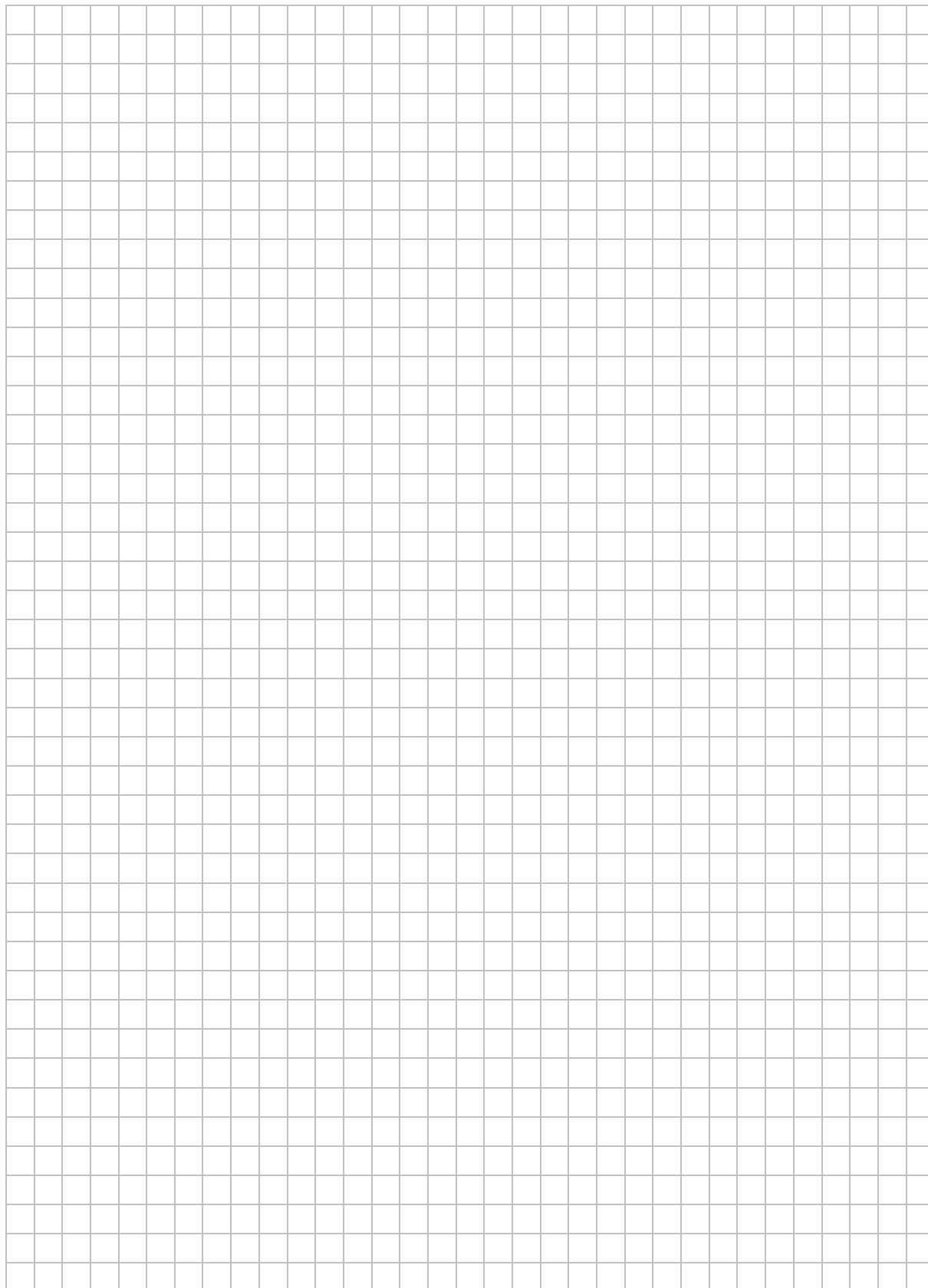
Zadanie 13. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty, 3)$.



Zadanie 14. (0–6)

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P . Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP .



Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

