

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź

Zadanie 1. (0–1)

Dane są dwie urny z kulami, w każdej jest 5 kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i 4 kule czarne. W drugiej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno lub dwa oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, natomiast jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

- A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{3}{5}$

Zadanie 2. (0–1)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{3}{(\sqrt{2})^n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ C. $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ D. $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\frac{27^{665} \cdot \sqrt[3]{3^{-92}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{152}{3}}}$ jest równa

- A. 3^{725} B. 3^{1995} C. 3^{2015} D. 3^{2045}

Zadanie 4. (0–1)

Okrąg o_1 ma równanie $x^2 + (y-1)^2 = 25$, a okrąg o_2 ma równanie $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.
B. Te okręgi są styczne.
C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_1 leży w całości wewnątrz okręgu o_2 .
D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości wewnątrz okręgu o_1 .

Zadanie 5. (0–1)

Dla każdego α suma $\sin \alpha + \sin 3\alpha$ jest równa

- A. $\sin 4\alpha$.
B. $2 \sin 4\alpha$.
C. $2 \sin 2\alpha \cos \alpha$.
D. $2 \sin \alpha \cos 2\alpha$.

ZADANIA OTWARTE

W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia. W zadaniach 10–18 rozwiązania należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 6. (0–2)

Liczba n jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą równanie

$$2 \cdot |x + 57| = |x - 39|.$$

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $|n|$.

--	--	--

A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of thin, light gray lines on a white background. The grid consists of small squares covering the entire area.

Zadanie 7. (0–2)

Oblicz granicę ciągu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{(8n + 7)(n + 4)}$.

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

--	--	--

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high, covering the entire area of the page.

Zadanie 8. (0–2)

Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \frac{x-8}{x^2+6}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x . Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x = \frac{1}{2}$.

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

A full-page sheet of white graph paper featuring a uniform grid of thin, light gray horizontal and vertical lines. The grid consists of small squares covering the entire area of the page.

Zadanie 9. (0–2)

Oblicz $\log_3 \sqrt[4]{27} - \log_3 \left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} \right)$.

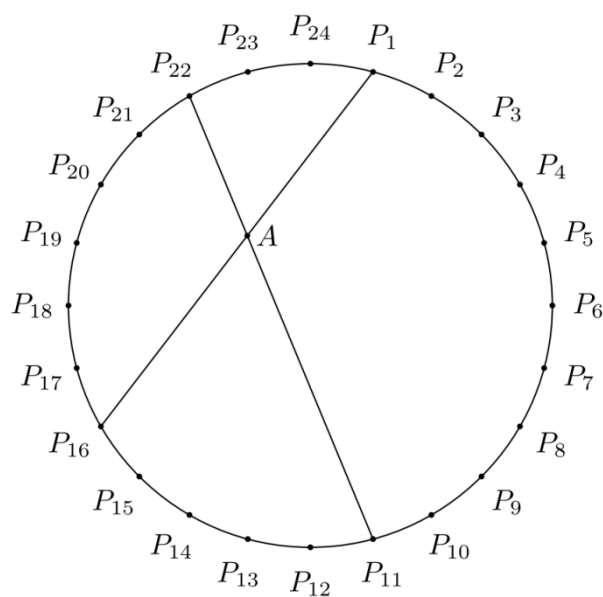
Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

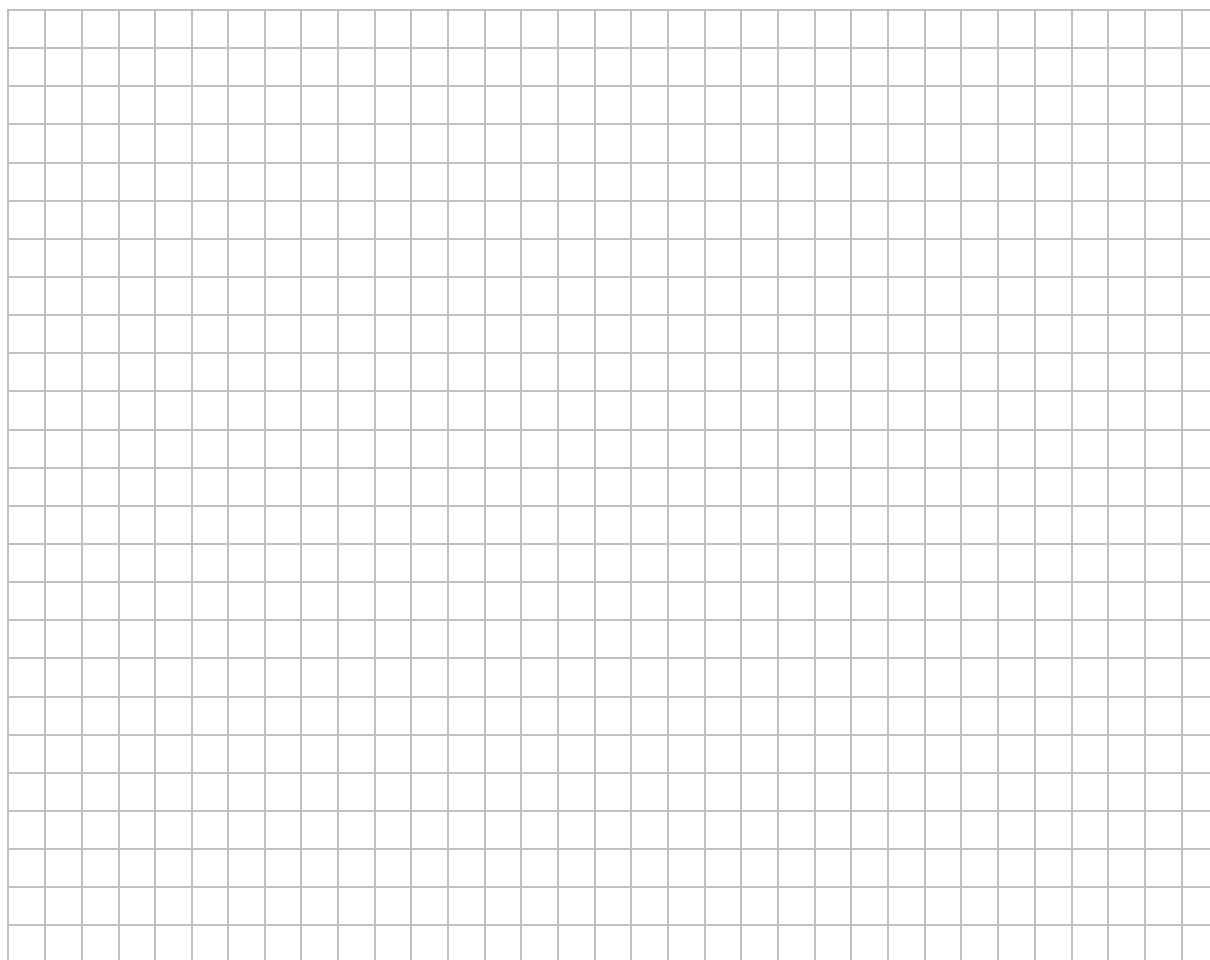
[illegible]

Zadanie 10. (0–3)

Punkty $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{23}, P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16} .



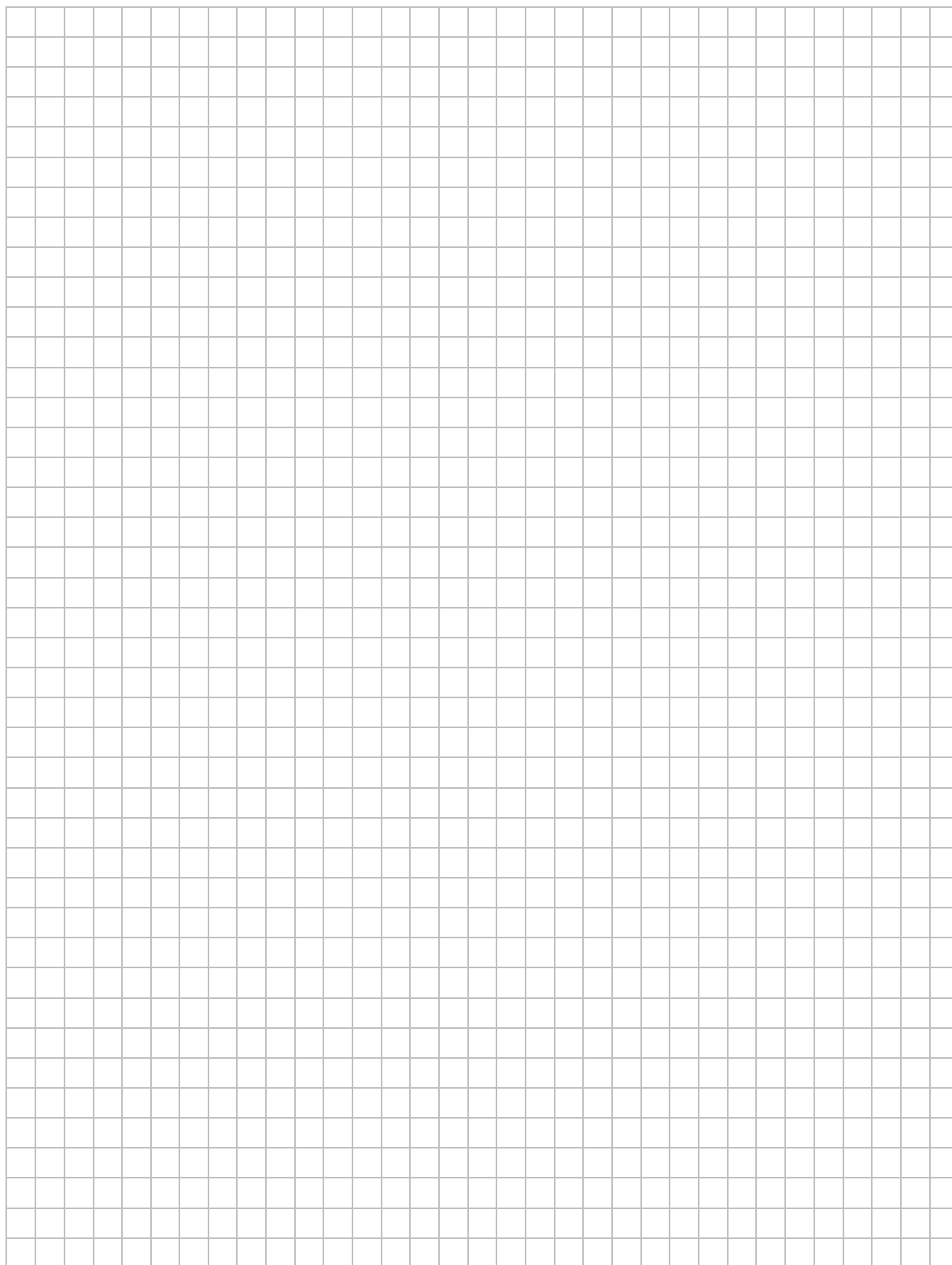
Udowodnij, że $|\sphericalangle P_{16}AP_{11}| = 60^\circ$.



Zadanie 11. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność

$$20x^2 - 24mx + 18m^2 \geq 4x + 12m - 5.$$



Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k jest dane wzorem:

Rozważamy dwa zdarzenia:

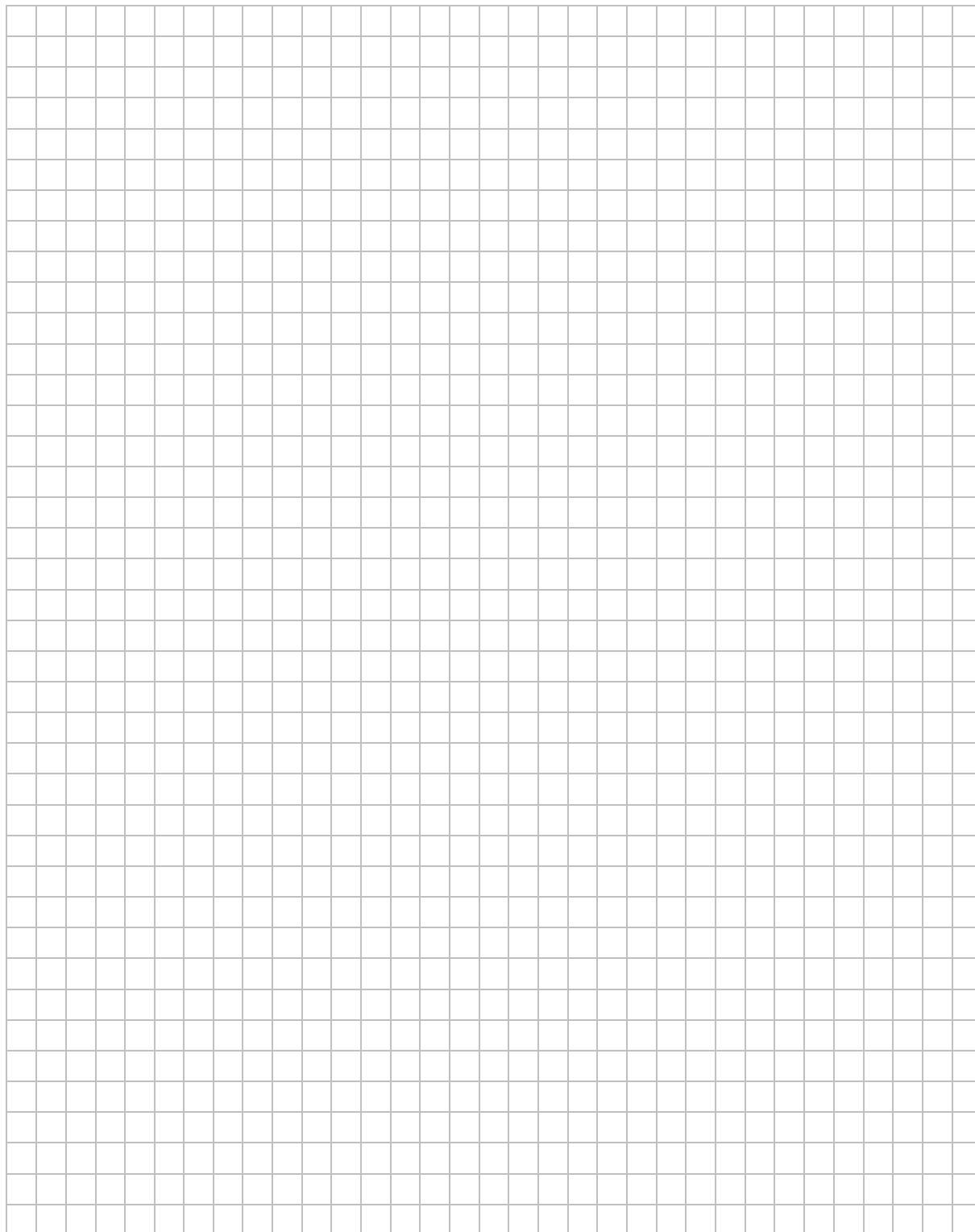
- Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Strona 9 z 19

Zadanie 13. (0–3)

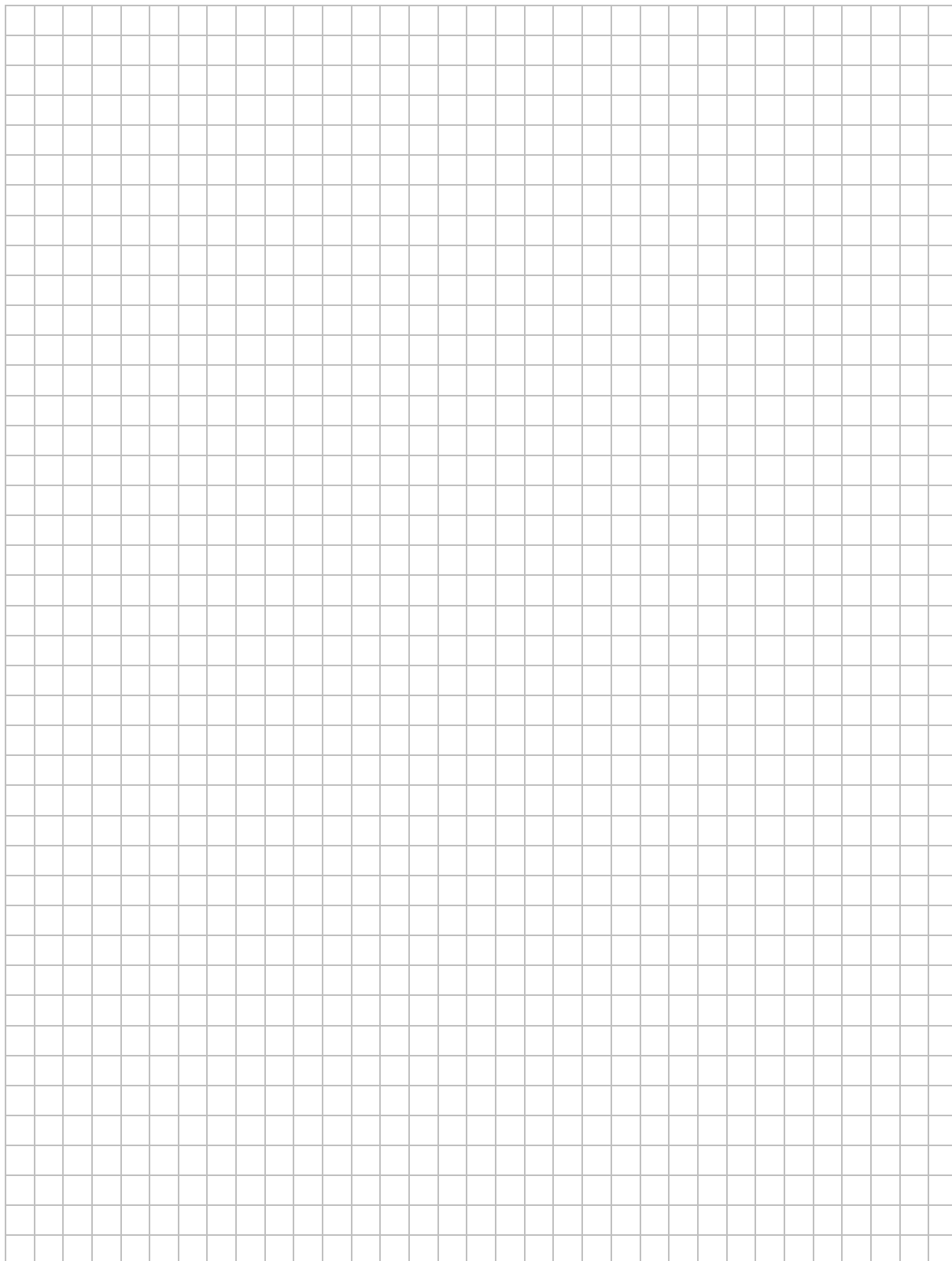
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których prosta o równaniu $y = mx + (2m + 3)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu $r = 3$.



Odpowiedź:

Zadanie 14. (0–3)

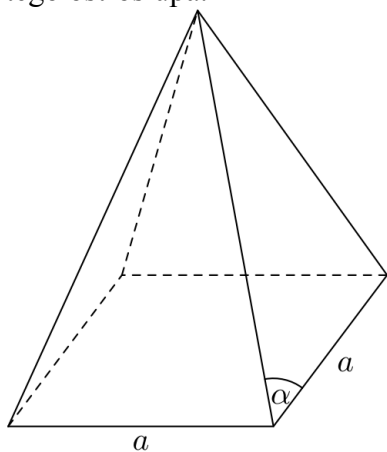
Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie A .



Odpowiedź:

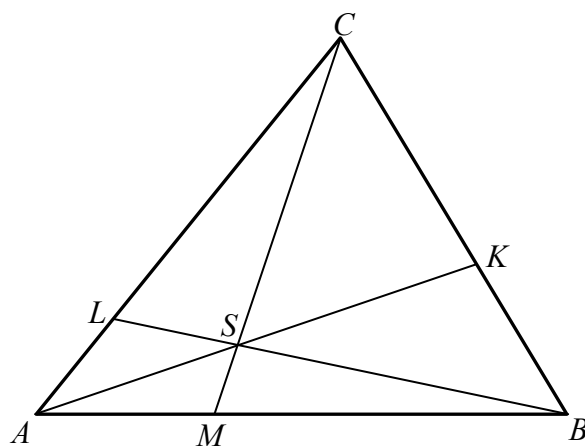
Zadanie 15. (0–3)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a . Kąt między krawędzią boczną, a krawędzią podstawy ma miarę $\alpha > 45^\circ$ (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.

[illegible]

Zadanie 16. (0–6)

Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2 \cdot |AM|$ oraz $|LC| = 3 \cdot |AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek).



Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS , ALS , BMS i CLS .



Zadanie 17. (0–6)

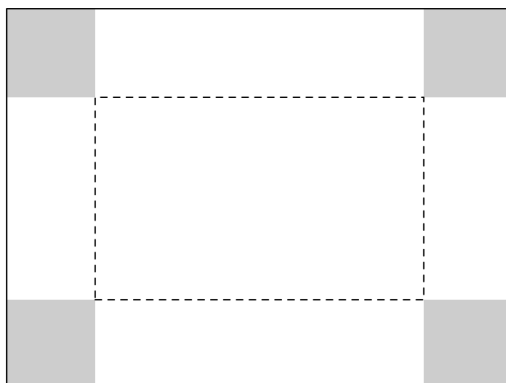
Oblicz, ile jest stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Odpowiedź:

Zadanie 18. (0–7)

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenną pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.

