

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 5. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n + n - 6$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $a_3 = -1$. Wyraz a_2 jest równy

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

Zadanie 2. (0–1)

Liczba punktów wspólnych wykresów funkcji $y = -x + 1$ i $y = \log_2 x$ jest równa

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 3. (0–1)

Która z poniższych funkcji, określonych w zbiorze liczb rzeczywistych, nie ma minimum lokalnego ani maksimum lokalnego?

- A. $f(x) = 4x^2 + 5x$
B. $f(x) = 3x^3 + 2x^2$
C. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$
D. $f(x) = (4x + 1)^2$

Zadanie 4. (0–1)

Dla dowolnego kąta α wartość wyrażenia $\sin \alpha + \sin(180^\circ - \alpha)$ jest równa wartości wyrażenia

- A. $\sin 2\alpha$ B. $-\sin \alpha$ C. $2 \sin \alpha$ D. 0

Zadanie 5. (0–1)

Zbiór K – to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których wartość liczbową wyrażenia $\sqrt{x(x^2 - 9)}$ jest liczbą rzeczywistą. Zatem

- A. $K = \langle -3, 0 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$ B. $K = (-\infty, -3) \cup \langle 0, 3 \rangle$
C. $K = (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ D. $K = (-\infty, -3) \cup (0, 3)$

Zadanie 6. (0-2)

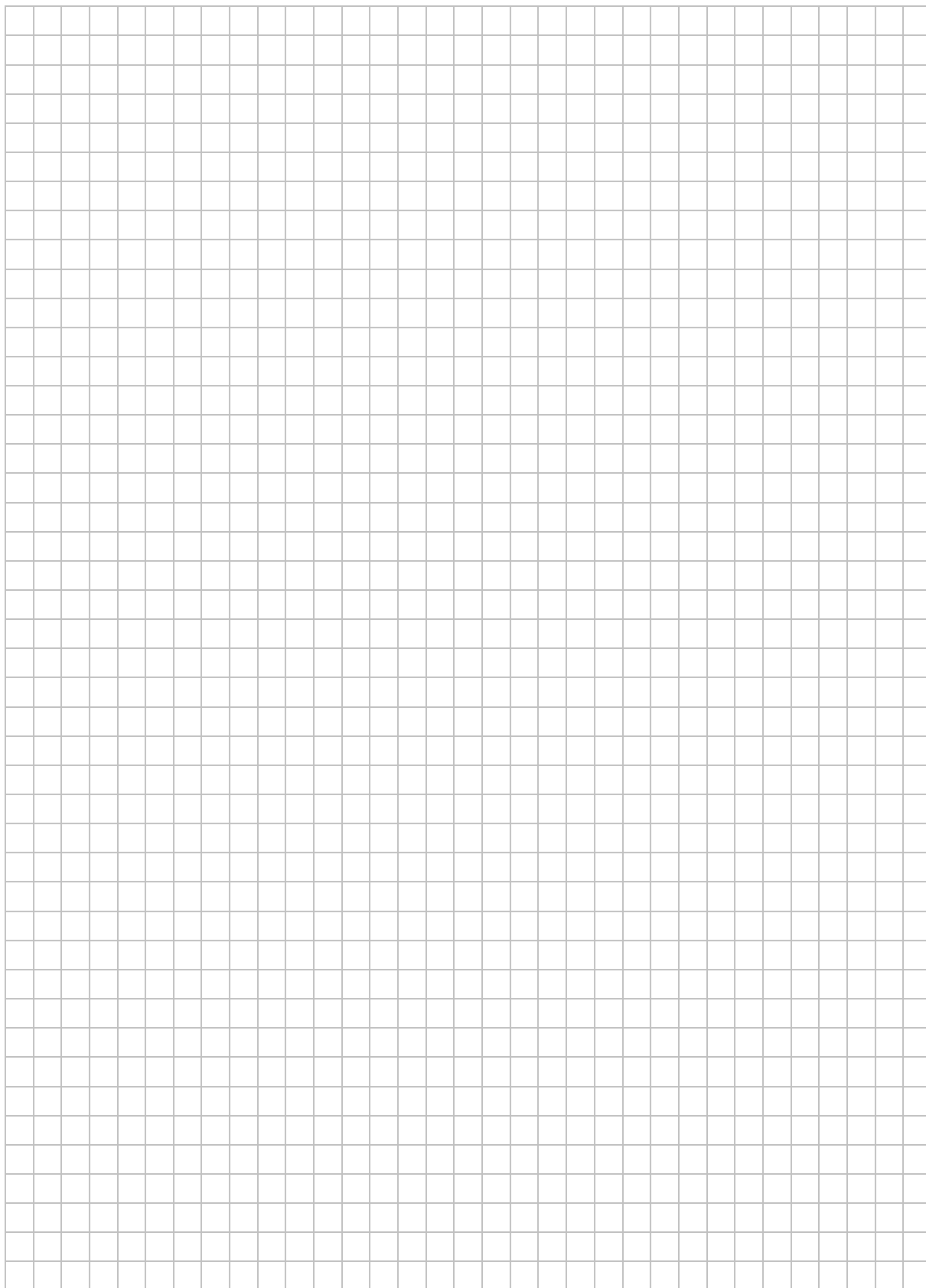
Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x| < |x - 1025|$. W poniższe kratki wpisz – kolejno – cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności otrzymanego wyniku.

--	--	--

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

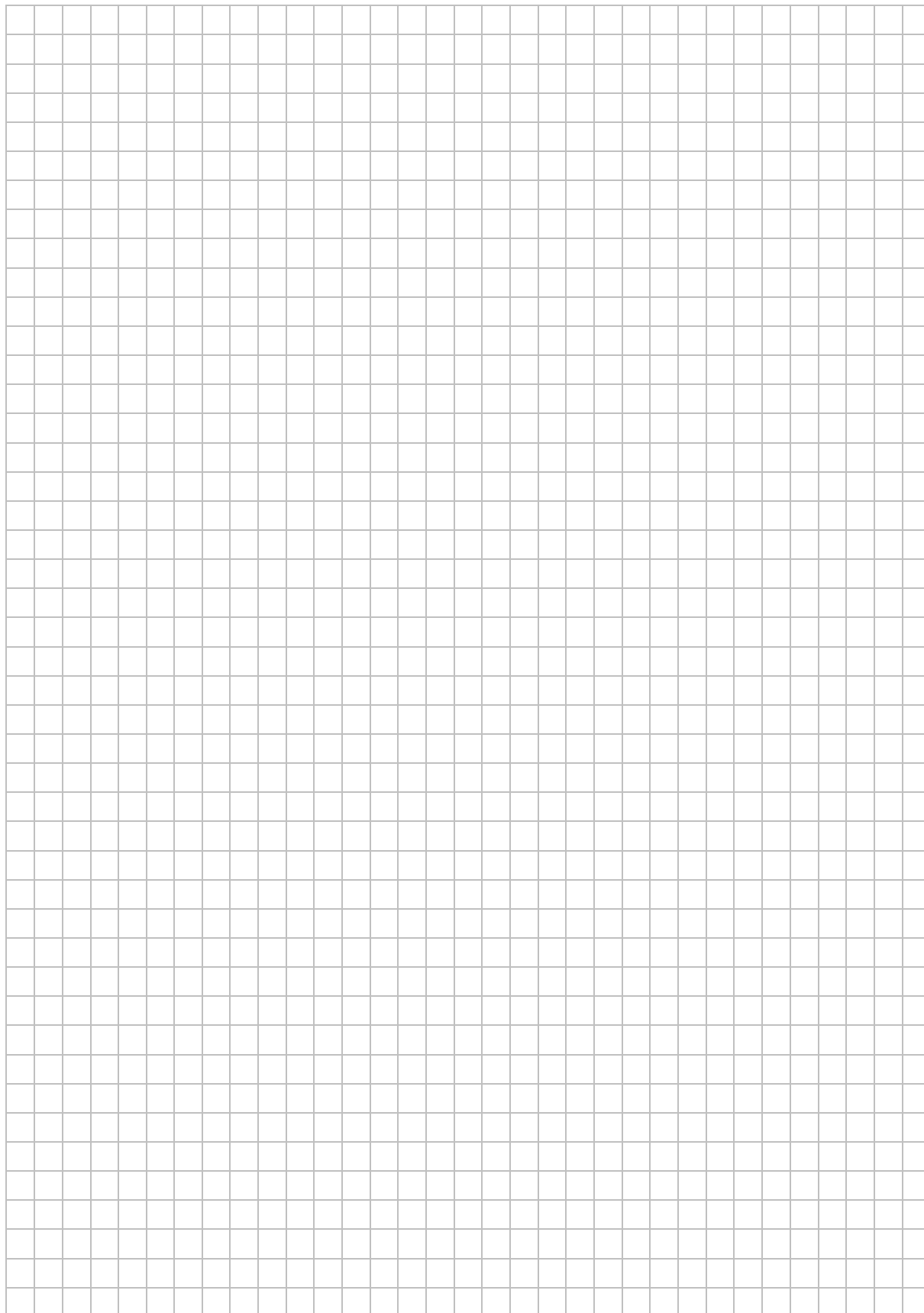
Zadanie 7. (0–2)

Prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$ jest styczna do okręgu o środku $S = (1, -4)$. Wyznacz promień tego okręgu.



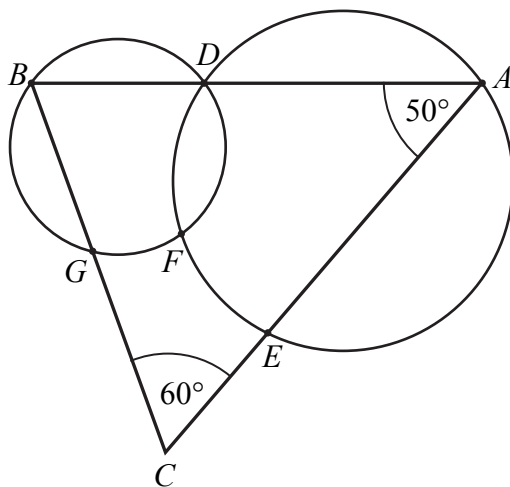
Zadanie 8. (0–3)

Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

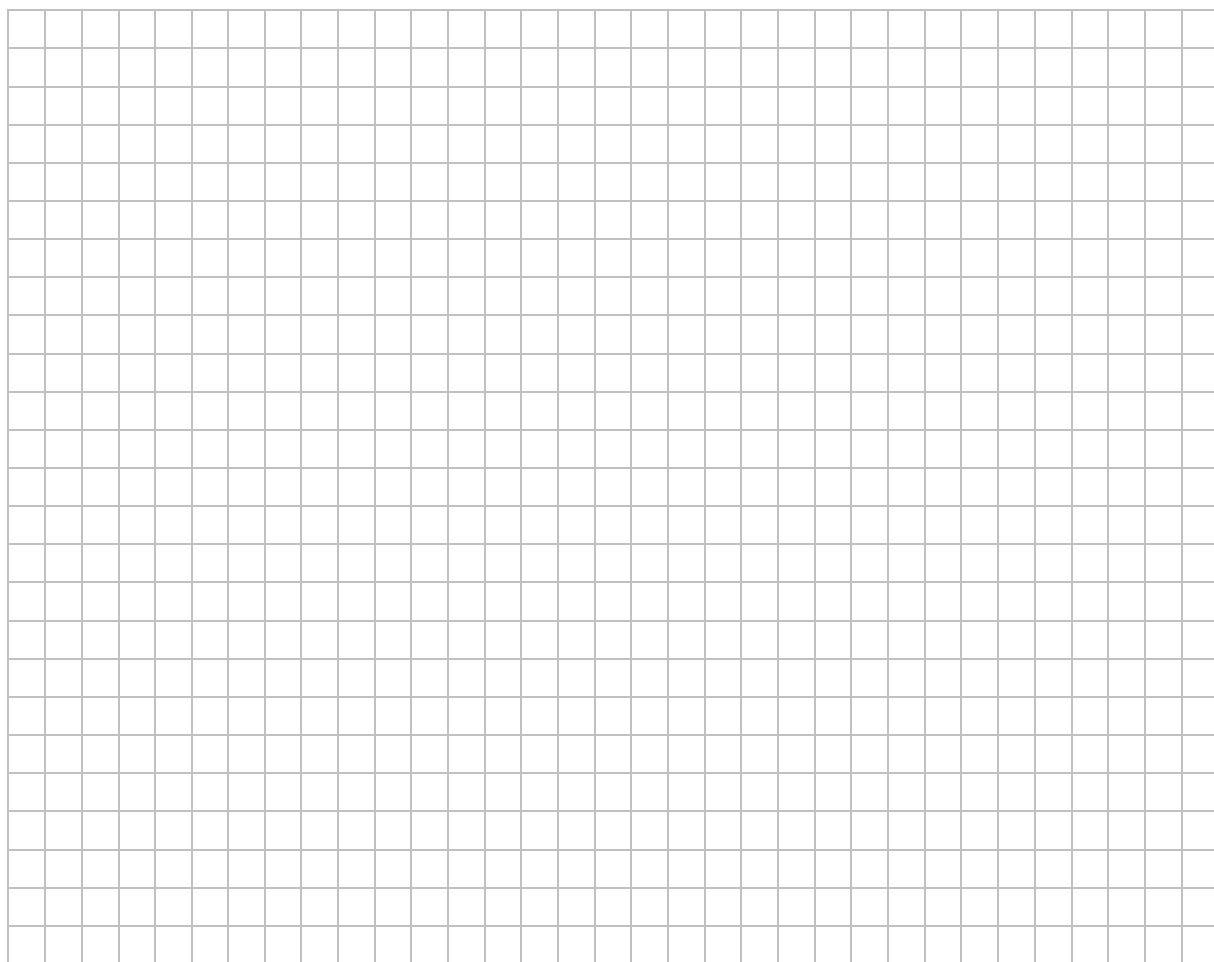


Zadanie 9. (0–3)

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę 50° , a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 60° . Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E . Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B , przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC . Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G .

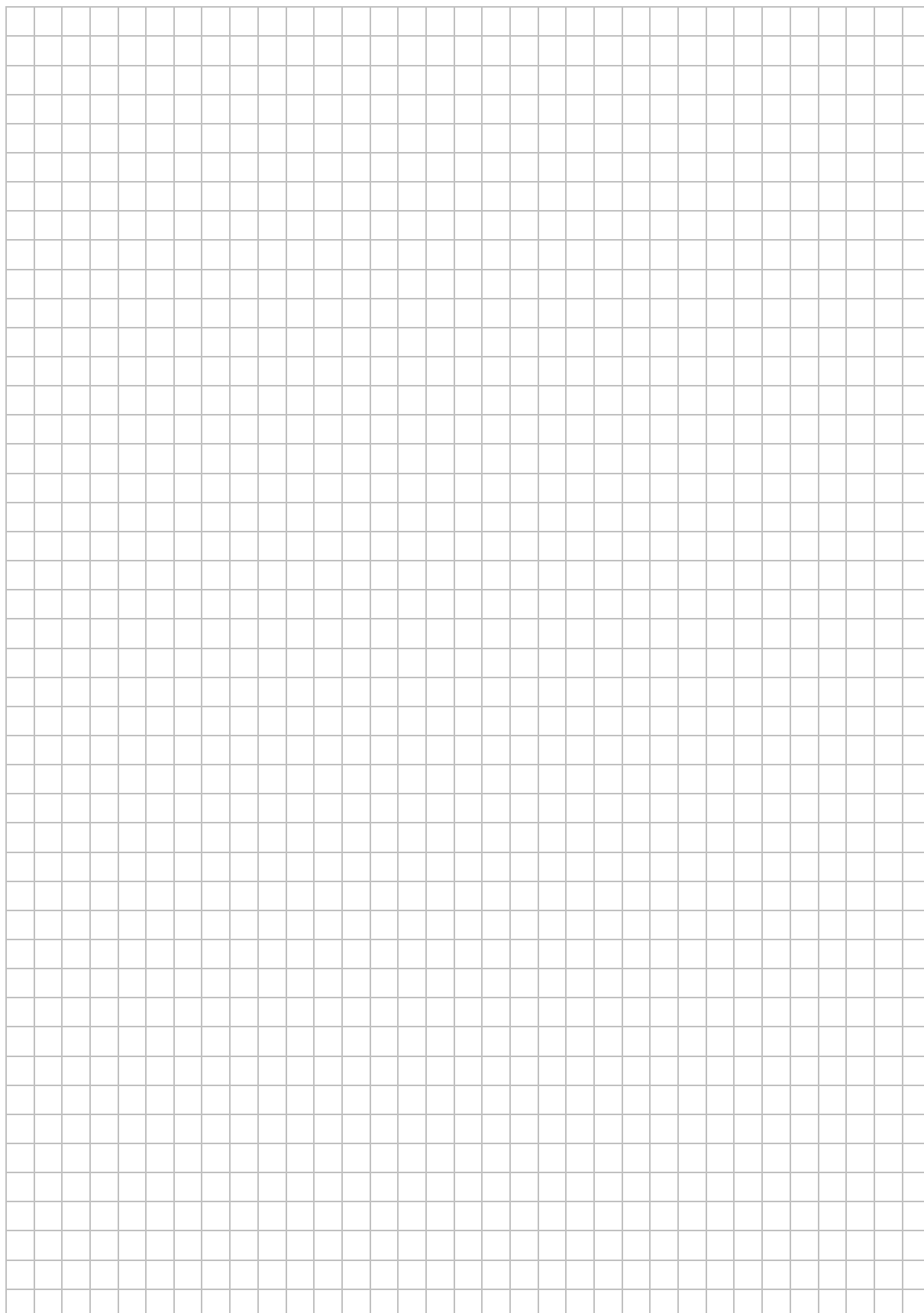


Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.



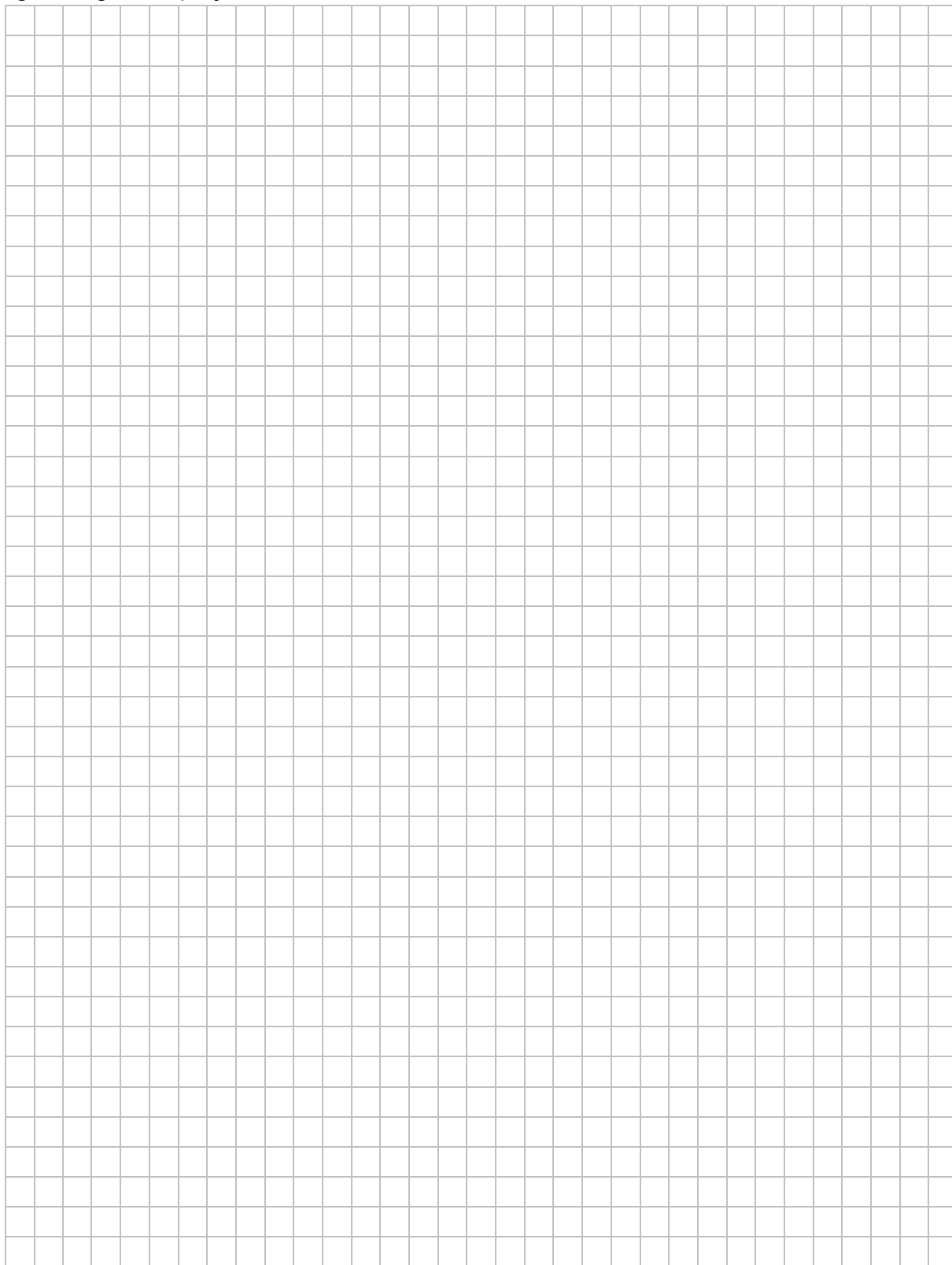
Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $(4 \sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3 \sin^2 x$, dla $x \in (-\pi, 0)$.



Zadanie 11. (0–4)

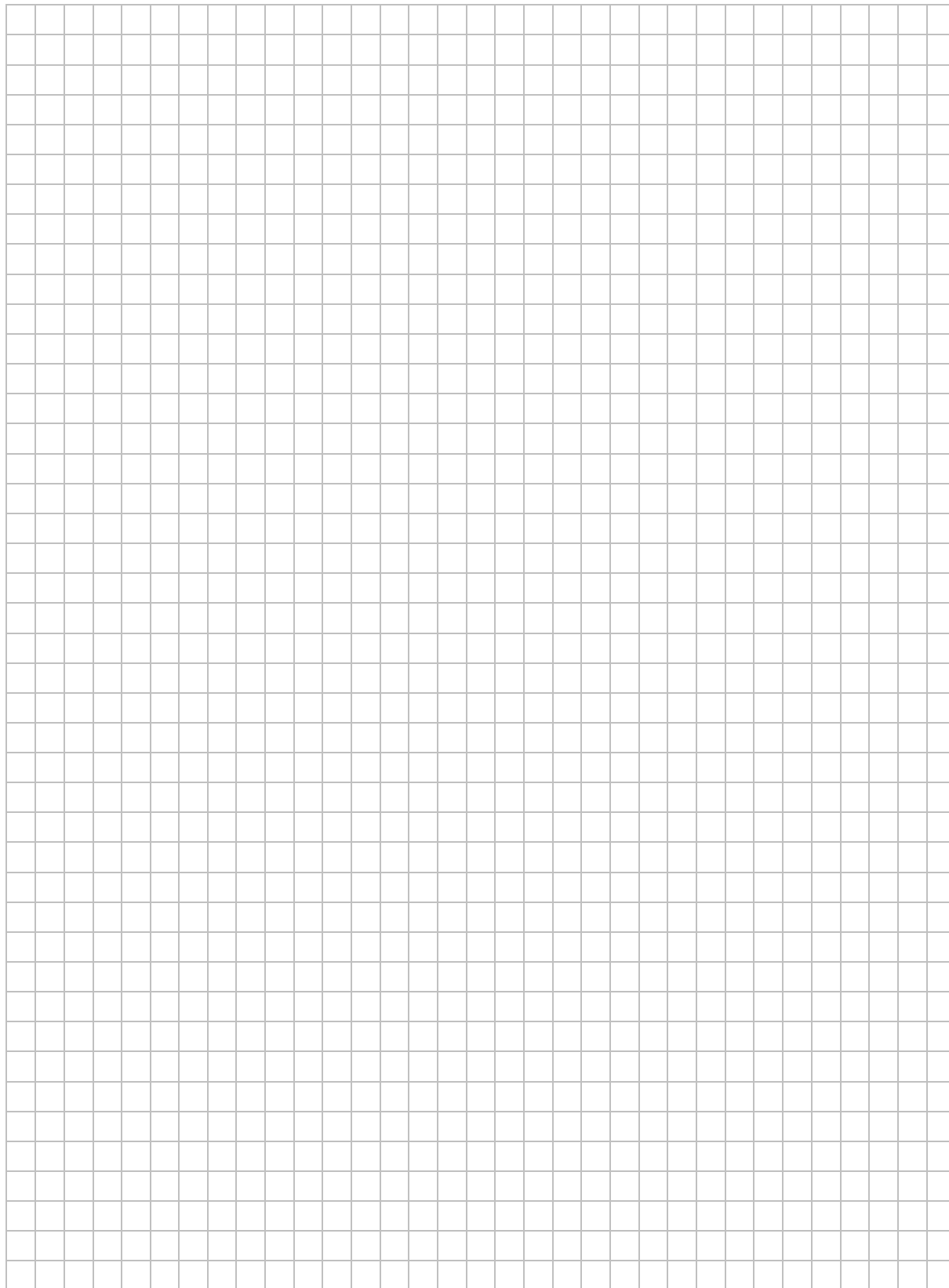
W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.



Odpowiedź:

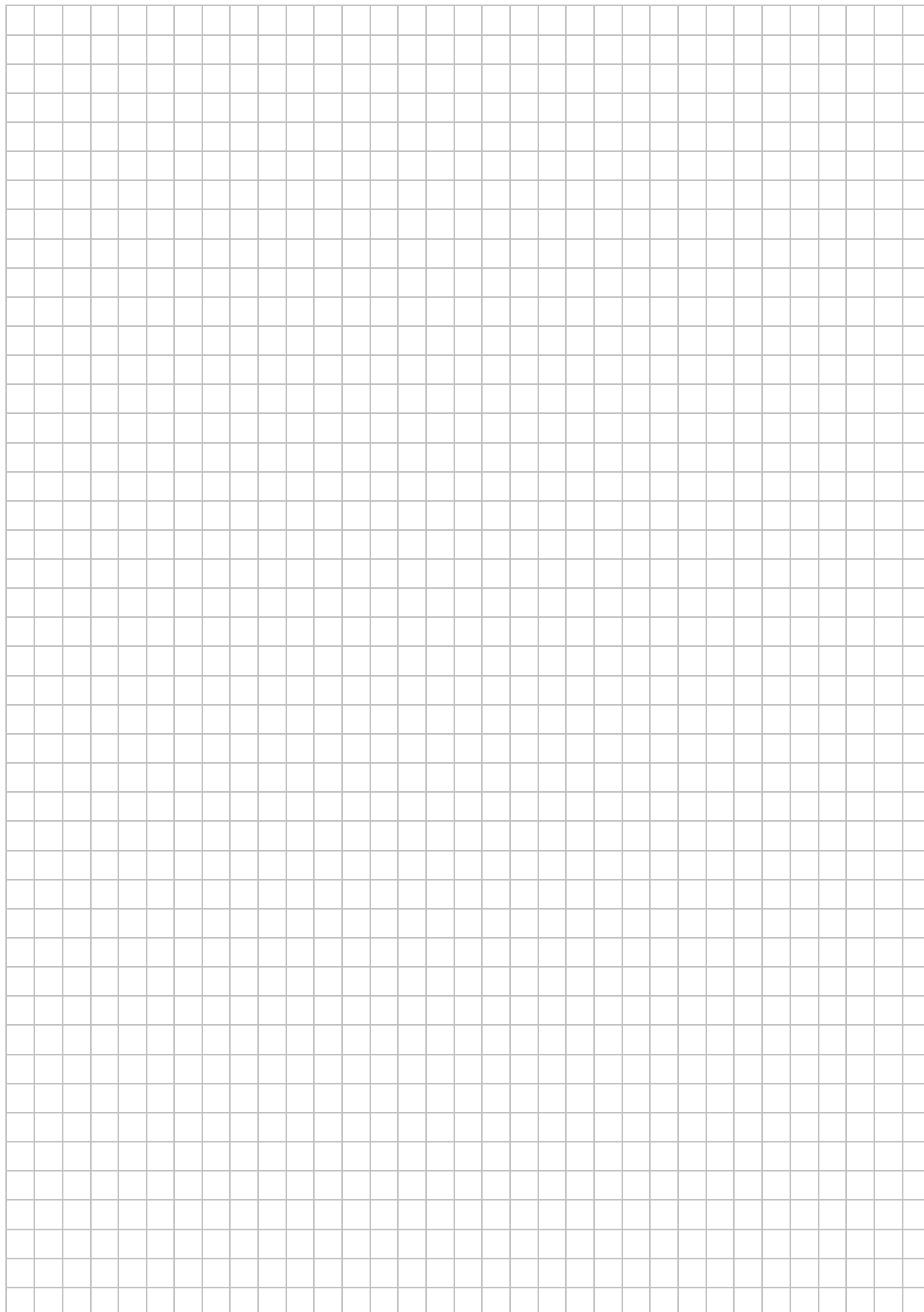
Zadanie 12. (0–4)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.



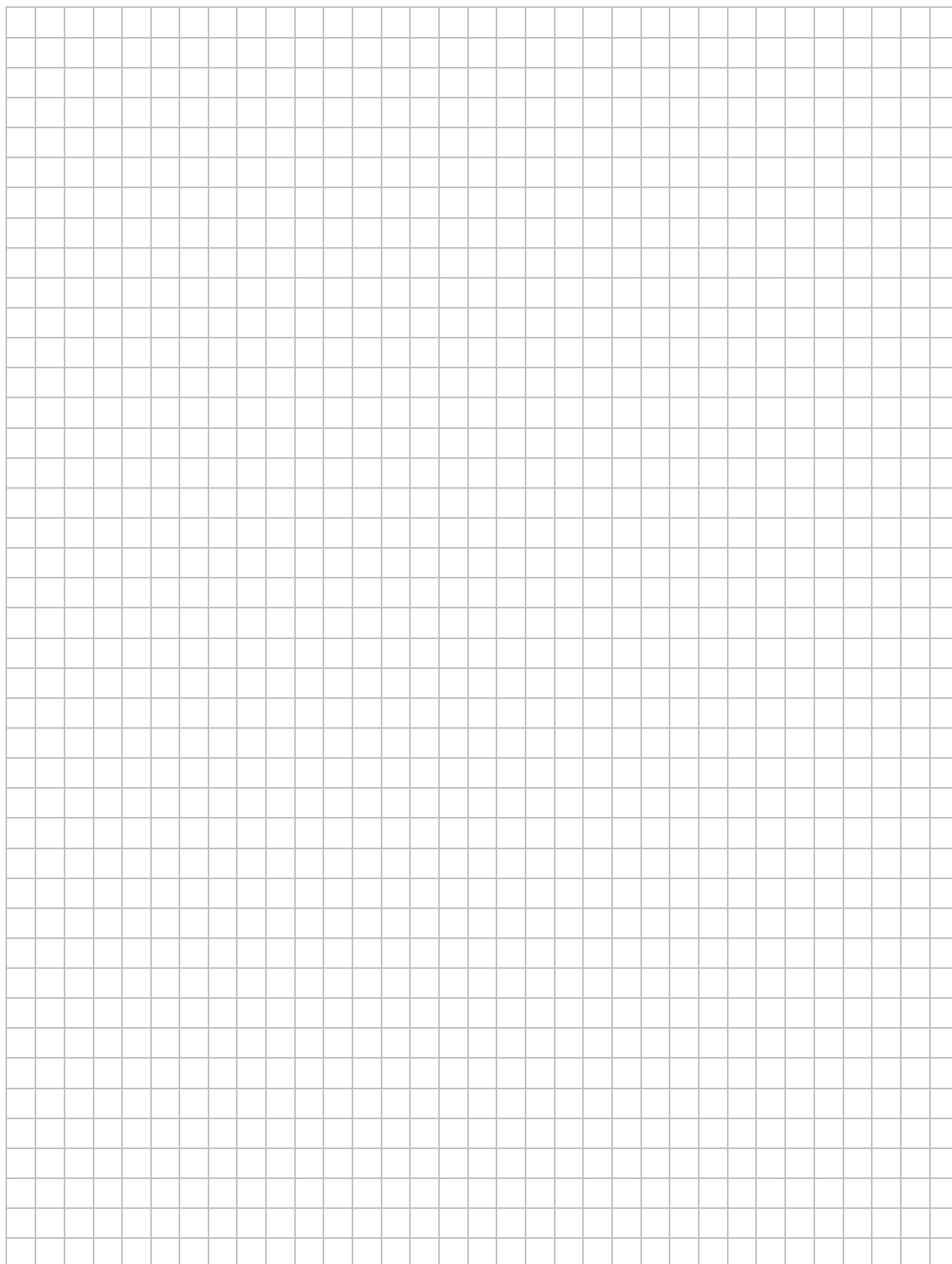
Zadanie 13. (0–5)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

A large grid of graph paper, consisting of 30 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to perform calculations or draw diagrams.

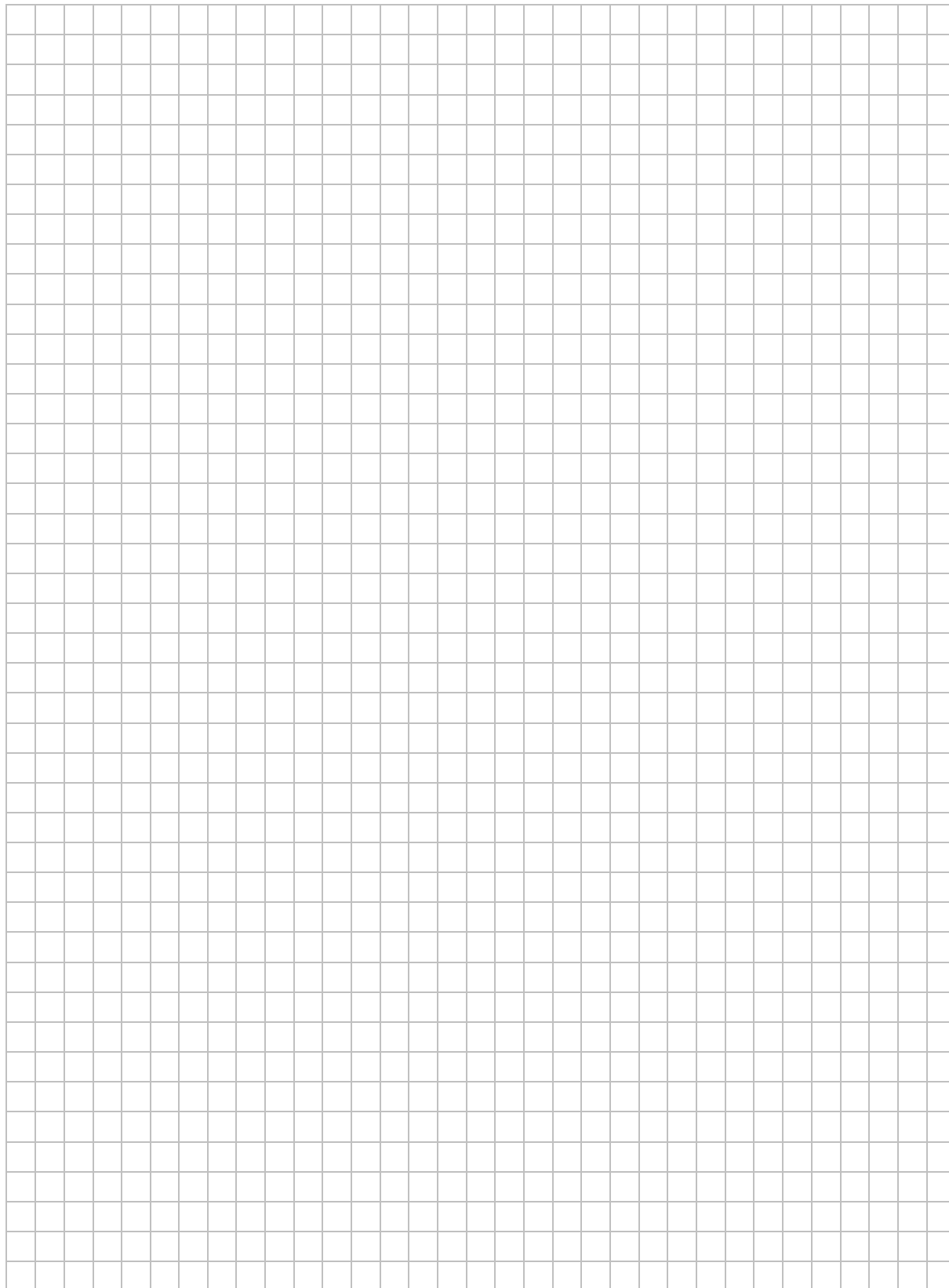
Zadanie 14. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze 30° . Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD .



Zadanie 15. (0–6)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5}x^2 - (m - 2)x + m - 5$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz całkowite wartości parametru m , dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.



Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

