

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-R1**

CZERWIEC 2015

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5
Odp.	D	B	C	C	A

Schemat oceniania zadania 6. i zadań otwartych

Zadanie 6. (0–2)

Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x| < |x - 1025|$. W poniższe kratki wpisz – kolejno – cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jednostki otrzymanego wyniku.

--	--	--

Odpowiedź

Szukaną liczbą jest 512.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **2 pkt**
gdy zapisze cyfry: 5, 1, 2.

Zadanie 7. (0–2)

Prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$ jest styczna do okręgu o środku $S = (1, -4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

Rozwiązanie

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej : $-3x + 4y + \frac{122}{7} = 0$. Obliczamy długość

$$\text{promienia okręgu: } r = \frac{\left| -3 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + \frac{122}{7} \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{35}.$$

Odpowiedź

Promień okręgu ma długość $r = \frac{11}{35}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze równanie prostej w postaci: $-3x + 4y + \frac{122}{7} = 0$ oraz wykorzysta wzór na

odległość punktu od prostej i zapisze $r = \frac{\left| -3 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + \frac{122}{7} \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy promień okręgu $r = \frac{11}{35}$.

Zadanie 8. (0–3)

Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

I sposób rozwiązania

Zmieniamy podstawę logarytmu i wykonujemy kolejno przekształcenia

$$\log_6 64 = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} \left(\frac{12}{2} \right)} = \frac{6 \log_{12} 2}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{6a}{1-a}. \text{ To kończy dowód.}$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze, że

$$\log_6 64 = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze, że

$$\log_6 64 = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} \left(\frac{12}{2} \right)}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Zauważamy kolejno, że

$$\frac{6a}{1-a} = \frac{6 \log_{12} 2}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \log_6 64.$$

A to kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze, że

$$\frac{6a}{1-a} = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....2 p.

Zdający zapisze, że

$$\frac{6a}{1-a} = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

III sposób rozwiązania

Równość $a = \log_{12} 2$ jest równoważna równości $12^a = 2$. Podzielimy tę równość stronami przez dodatnią liczbę 2^a . Otrzymujemy równość

$$\frac{12^a}{2^a} = \frac{2}{2^a}, \text{ a zatem } 6^a = 2^{1-a}.$$

Ponieważ obie strony równości są dodatnie, więc ta równość jest równoważna równości

$$6^{6a} = 64^{1-a}, \text{ a zatem } 6^{\frac{6a}{1-a}} = 64.$$

Ostatnia równość oznacza, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$. To kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze, że

$$\frac{12^a}{2^a} = \frac{2}{2^a}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....2 p.

Zdający zapisze, że

$$6^{6a} = 64^{1-a}$$

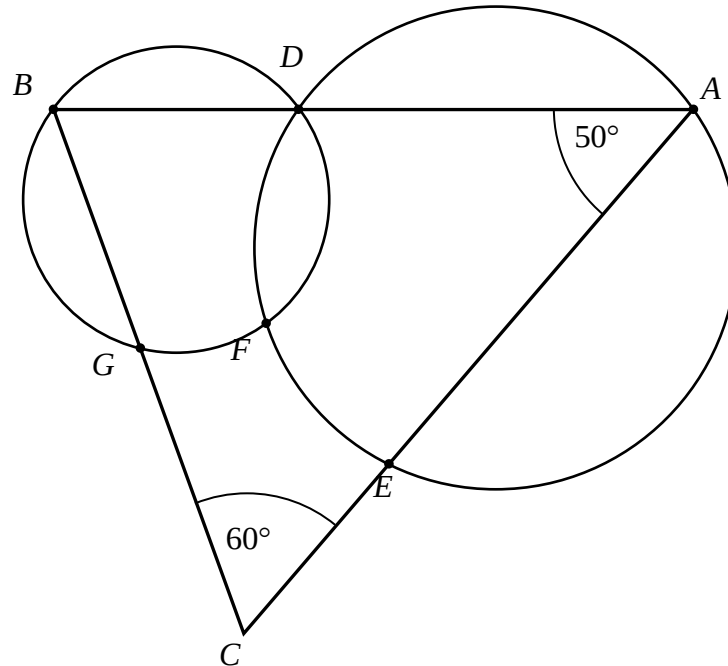
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–3)

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę 50° , a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 60° . Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E . Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B , przecina okrąg o_1 w punkcie F oraz w punkcie G leżącym wewnątrz trójkąta ABC . Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G .

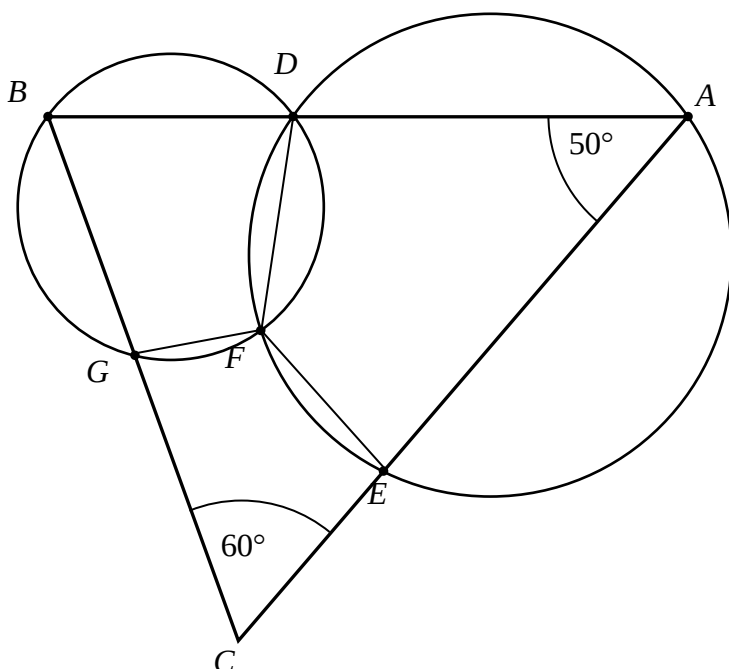


Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie

Trzeci kąt trójkąta ABC ma miarę: $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$.

Połączmy punkt F z punktami D , E i G .



Czworokąty $ADFE$ i $BDFG$ są wpisane odpowiednio w okręgi O_1 i O_2 , więc

$$|\sphericalangle DFE| = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \text{ oraz } |\sphericalangle DFG| = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ. \text{ Zatem}$$

$$|\sphericalangle EFG| = 360^\circ - (130^\circ + 110^\circ) = 120^\circ.$$

Stąd $|\sphericalangle EFG| + |\sphericalangle ECG| = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, zatem na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg, co kończy dowód.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 p.

Obliczenie miary kąta DFE : $|\sphericalangle DFE| = 130^\circ$ **albo** miary kąta DFG : $|\sphericalangle DFG| = 110^\circ$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Obliczenie miary kąta EFG : $|\sphericalangle EFG| = 120^\circ$.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Pełne uzasadnienie, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, dla $x \in (-\pi, 0)$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i zapisujemy równanie

$(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$ w postaci równoważnej $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = 1 - 4\sin^2 x$.

Przekształcamy to równanie i zapisujemy je w postaci iloczynowej:

$$(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x - 1 + 4\sin^2 x = 0,$$

$$(4\sin^2 x - 1) \cdot (\sin x + 1) = 0,$$

$$(2\sin x - 1) \cdot (2\sin x + 1) \cdot (\sin x + 1) = 0.$$

Warunek $\sin x = \frac{1}{2}$ jest sprzeczny z założeniem $x \in (-\pi, 0)$, bo wtedy $\sin x < 0$.

Zatem warunki $\sin x = -\frac{1}{2}$ i $x \in (-\pi, 0)$ wyznaczają rozwiązanie $x = -\frac{\pi}{6}$ lub $x = -\frac{5\pi}{6}$,

a warunki $\sin x = -1$ i $x \in (-\pi, 0)$ wyznaczają rozwiązanie $x = -\frac{\pi}{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze

trudności zadania..... 1 pkt

Zapisanie równania z niewiadomą $\sin x$: $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = 1 - 4\sin^2 x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie równania w postaci alternatywy: $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$, lub $\sin x = -1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Rozwiązanie jednego z trzech równań w przedziale $(-\pi, 0)$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Podanie wszystkich rozwiązań należących do przedziału $(-\pi, 0)$:

$$x = -\frac{\pi}{6} \text{ lub } x = -\frac{5\pi}{6}, \text{ lub } x = -\frac{\pi}{2}.$$

Uwagi

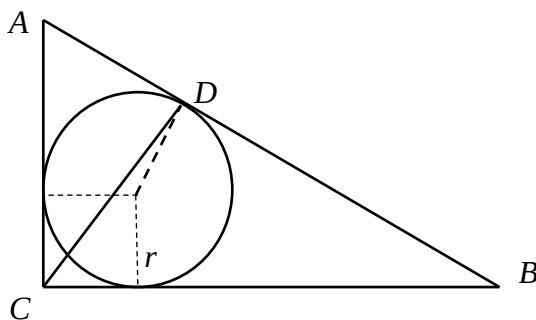
1. Jeżeli zdający nie odrzuci warunku $\sin x = \frac{1}{2}$ oraz wyznaczy z pozostałych warunków poprawne rozwiązania równania, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający poda ogólne rozwiązania równania bez uwzględnienia przedziału $(-\pi, 0)$, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 11. (0–4)

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość przeciwprostokątnej AB : $|AB| = 25$

i kosinus kąta $\sphericalangle CAB$: $\cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{5}$.

Obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny:

$$r = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = \frac{15 + 20 - 25}{2} = 5.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wyznaczamy długość odcinka AD : $|AD| = 10$.

Obliczamy $|CD|$ stosując twierdzenie kosinusów dla trójkąta ACD :

$$|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2|AC||AD|\cos \sphericalangle CAD = 225 + 100 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 145.$$

$$\text{Stąd } |CD| = \sqrt{145}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Zdający obliczy długość przeciwprostokątnej i kosinusa kąta ostrego trójkąta:

$$|AB| = 25, \cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{5}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zdający obliczy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt: $r = 5$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Obliczenie długości odcinka AD : $|AD| = 10$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Wyznaczenie długości odcinka CD : $|CD| = \sqrt{145}$.

Uwaga

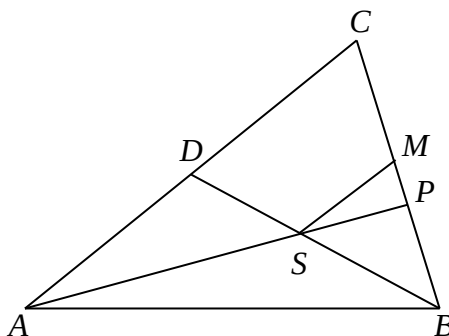
Jeżeli zdający zakłada, że odcinek CD jest prostopadły do przeciwprostokątnej AB i z tego korzysta, to za całe zadanie może otrzymać nie więcej niż **1 punkt**.

Zadanie 12. (0–4)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

Rozwiązanie

Rysujemy trójkąt ABC , zaznaczamy punkty D, S, P i rysujemy odcinek SM równoległy do AC i taki, że $M \in BC$.



Trójkąty BSM i BDC są podobne, zatem $\frac{|BS|}{|DB|} = \frac{|BM|}{|BC|} = \frac{1}{2}$, stąd $|BM| = |CM| = \frac{1}{2}a$

i $|MS| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{4}|AC|$

Trójkąty PSM i PAC są podobne, zatem $\frac{|PM|}{|MS|} = \frac{|PC|}{|AC|}$. Stąd $\frac{|MP|}{|MS|} = \frac{|PM| + |CM|}{|AC|}$

i $\frac{|MP|}{\frac{1}{4}|AC|} = \frac{|MP| + \frac{1}{2}a}{|AC|}$, czyli $4|MP| = |MP| + \frac{1}{2}a$. Stąd $|MP| = \frac{1}{6}a$.

Szukany odcinek ma więc długość: $|CP| = |MC| + |MP| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a = \frac{2}{3}a$, co należało wykazać.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zauważył, że trójkąty BSM i BDC są podobne i zapisze proporcję $\frac{|BS|}{|DB|} = \frac{|BM|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy długość odcinka CM oraz wyznaczy długość odcinka MS w zależności od długości odcinka AC : $|CM| = \frac{1}{2}a$, $|MS| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{4}|AC|$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy długość odcinka MP : $|MP| = \frac{1}{6}a$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowania, tzn. wyznaczy długość odcinka: $|CP| = \frac{2}{3}a$.

Zadanie 13. (0–5)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

Rozwiązanie

W zapisie liczby mają być co najwyżej dwie dwójki, tzn. zero dwójek lub jedna dwójka, lub dwie dwójki.

1. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie nie ma dwójki: na pierwszym miejscu występuje dowolna spośród 8 cyfr (bez zera i dwójki), na drugim jedna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim jedna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym jedna z 9 cyfr (bez dwójki) i na piątym miejscu jedna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych bez dwójki jest: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 23328$.

2. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie jest dokładnie jedna dwójka:

a) dwójka występuje na pierwszym miejscu, na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na pierwszym miejscu jest: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2916$.

b) dwójka występuje na drugim miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na drugim miejscu jest: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$.

c) dwójka występuje na trzecim miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na trzecim miejscu jest: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$.

d) dwójka występuje na czwartym miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na czwartym miejscu jest: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$.

e) dwójka na piątym miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki). Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na piątym miejscu jest: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$.

Stąd wszystkich liczb pięciocyfrowych z jedną dwójką jest:

$$2916 + 2592 + 2592 + 2592 + 5832 = 16524.$$

3. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie są dokładnie dwie dwójki:

a) jedna dwójka występuje na pierwszym miejscu, druga na drugim, trzecim lub czwartym, zatem każdą z pozostałych środkowych dwóch cyfr wybieramy spośród 9 cyfr (bez dwójki) i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Tych liczb jest więc:
 $3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 972$.

b) jedna dwójka występuje na pierwszym miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem każdą z pozostałych środkowych trzech cyfr wybieramy spośród 9 cyfr (bez dwójki). Tych liczb jest więc: $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.

c) jedna dwójka występuje na drugim miejscu, a druga dwójka na trzecim lub czwartym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera) pozostałą środkową spośród 9 cyfr (bez dwójki) i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Tych liczb jest więc: $2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 4 = 576$.

d) jedna dwójka występuje na drugim miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), pozostałe dwie środkowe cyfry spośród 9 (bez dwójki). Tych liczb jest więc: $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$.

e) jedna dwójka występuje na trzecim miejscu, a druga dwójka na czwartym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), drugą spośród 9 i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Tych liczb jest więc: $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$.

f) jedna dwójka występuje na trzecim lub na czwartym miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), drugą spośród 9 (bez dwójki) i trzecią lub czwartą cyfrę spośród 9 (bez dwójki). Tych liczb jest więc:
 $2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 1296$.

Stąd wszystkich liczb pięciocyfrowych z dwiema dwójkami jest
 $972 + 729 + 576 + 648 + 288 + 1296 = 4509$.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki jest: $23328 + 16524 + 4509 = 44361$.

Odpowiedź: Jest 44361 liczb parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zapisanie, że szukamy liczb, w których zapisie występuje zero, jedna lub dwie dwójki i obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych bez dwójki: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 23328$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 3 p.

Obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie jest dokładnie jedna dwójka: $2916 + 2592 + 2592 + 2692 + 5832 = 16524$.

Uwaga

Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy pominie jeden przypadek.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie są dwie dwójki: $972 + 729 + 576 + 648 + 288 + 1296 = 4509$.

Uwaga

Zdający otrzymuje **3 punkty**, gdy pominie jeden przypadek.

Rozwiązanie pełne 5 p.

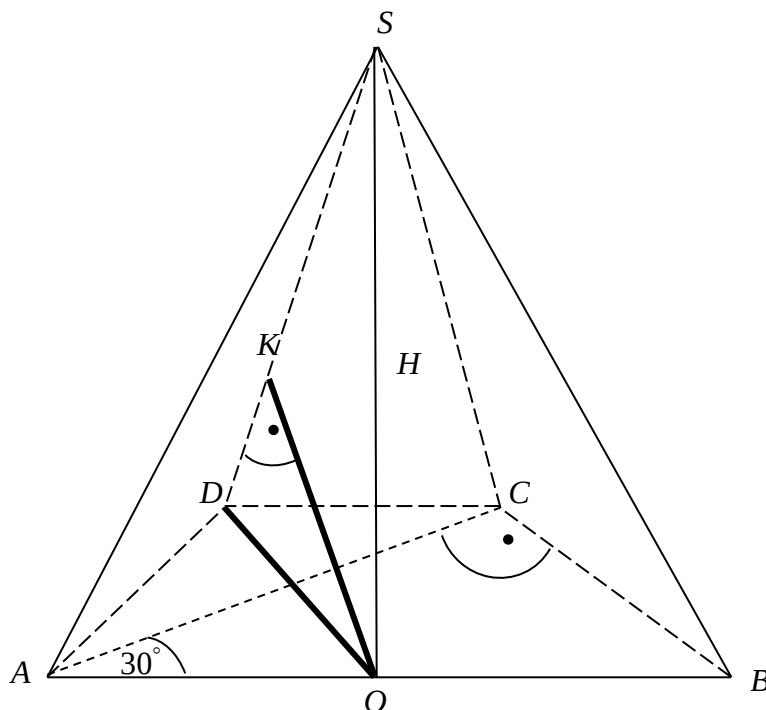
Obliczenie, ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki: $23328 + 16524 + 4509 = 44361$.

Zadanie 14. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze 30° . Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD .

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, zatem spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i trapez $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, gdzie $|AD|=|BC|$. Przekątna d trapezu będącego podstawą ostrosłupa jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Stąd środek O okręgu opisanego na podstawie jest środkiem dłuższej podstawy AB trapezu. Zatem ściana boczna ABS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Z trójkąta ABC mamy $|BC|=|AD|=8$.

Dalej wyznaczamy $|\angle ODA|=60^\circ$ i $|AO|=|OD|$, czyli trójkąt AOD jest trójkątem równobocznym o boku długości 8.

Z trójkąta SOD lub AOS mamy $H^2 + 8^2 = (4\sqrt{5})^2$. Stąd $H = 4$.

Z trójkąta SOD otrzymujemy: $|OK| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. Krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, zatem spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i trapez $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, gdzie $|AD|=|BC|$. Przekątna d

trapezu będącego podstawą ostrosłupa jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Stąd środek O okręgu opisanego na podstawie jest środkiem dłuższej podstawy AB trapezu. Zatem ściana boczna ABS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Z trójkąta ABC mamy $|BC| = |AD| = 8$.

Dalej mamy $|\sphericalangle ODA| = 60^\circ$ i $|AO| = |OD|$, czyli trójkąt AOD jest trójkątem równobocznym o boku długości 8.

Z trójkąta SOD lub AOS mamy $H^2 + 8^2 = (4\sqrt{5})^2$. Stąd $H = 4$.

Z trójkąta SOD otrzymujemy: $|OK| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zauważenie, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem krawędzi AB podstawy i ściana boczna ABS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wyznaczenie długości ramienia trapezu: $|BC| = |AD| = 8$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 4$ i poprawnie zinterpretowanie odległości spodka wysokości od krawędzi bocznej SD .

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Obliczenie długości odcinka OK z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie długości odcinka OK : $|OK| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Zadanie 15. (0–6)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5}x^2 - (m - 2)x + m - 5$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz całkowite wartości parametru m , dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

Rozwiązanie

Założenie $m \neq 5$.

Gdy $\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} = 0$, czyli $(m + 3)(m - 2) = 0$, a więc dla $m = -3$ lub $m = 2$ funkcja jest

liniowa i nie spełnia warunków zadania. Zatem $m \neq 5$, $m \neq -3$ i $m \neq 2$.

Wówczas funkcja f jest kwadratowa oraz:

- przyjmuje wartość największą, gdy $\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} < 0$,
- ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$,
- ma dwa miejsca zerowe o jednakowych znakach, gdy dodatkowo $x_1 \cdot x_2 > 0$.

Rozwiązujemy nierówność $\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} < 0$, otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} &< 0, \\ \frac{(m + 3)(m - 2)}{m - 5} &< 0, \\ (m + 3)(m - 2)(m - 5) &< 0.\end{aligned}$$

Zatem $m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$.

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}(-(m - 2))^2 - 4 \cdot \frac{m^2 + m - 6}{m - 5} \cdot (m - 5) &> 0, \\ (m - 2)^2 - 4 \cdot (m^2 + m - 6) &> 0, \\ (m - 2)^2 - 4 \cdot (m + 3)(m - 2) &> 0, \\ (m - 2)((m - 2) - 4(m + 3)) &> 0, \\ (m - 2)(m - 2 - 4m - 12) &> 0, \\ (m - 2)(-3m - 14) &> 0.\end{aligned}$$

Zatem $-\frac{14}{3} < m < 2$.

Rozwiązujemy nierówność $x_1 \cdot x_2 > 0$. Możemy wykorzystać wzór Viète'a na iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego i wtedy nierówność ma postać

$$\frac{m - 5}{\frac{m^2 + m - 6}{m - 5}} > 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność, otrzymując kolejno

$$\frac{(m-5)^2}{m^2+m-6} > 0,$$

$$(m-5)^2(m-2)(m+3) > 0,$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty).$$

Otrzymaliśmy zatem $m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$ i $m \in \left(-\frac{14}{3}, 2\right)$ i $m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$.

Stąd $m \in \left(-\frac{14}{3}, -3\right)$. Jediną liczbą całkowitą z tego przedziału jest $m = -4$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na zapisaniu warunku, przy którym funkcja f jest kwadratowa i ma dwa różne pierwiastki, a następnie rozwiązaniu nierówności

$$\left(-(m-2)\right)^2 - 4 \cdot \frac{m^2+m-6}{m-5} \cdot (m-5) > 0: -\frac{14}{3} < m < 2.$$

Za poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na zapisaniu warunku, przy którym funkcja kwadratowa f przyjmuje

wartość największą: $\frac{m^2+m-6}{m-5} < 0$

oraz ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach: $\frac{m-5}{\frac{m^2+m-6}{m-5}} > 0.$

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

- Za rozwiązanie nierówności $\frac{m^2+m-6}{m-5} < 0: m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$ zdający otrzymuje **2 punkty**.

- Za rozwiązanie nierówności $x_1 \cdot x_2 > 0$ zdający otrzymuje **2 punkty**.

Przy czym w tej części:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie wyrażenia $x_1 \cdot x_2$ w postaci $\frac{m-5}{\frac{m^2+m-6}{m-5}},$

2 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności $\frac{(m-5)^2}{m^2+m-6} > 0:$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego oraz podaniu liczby całkowitej spełniającej warunki zadania: $m = -4$.

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **1 punkt**.

Uwaga

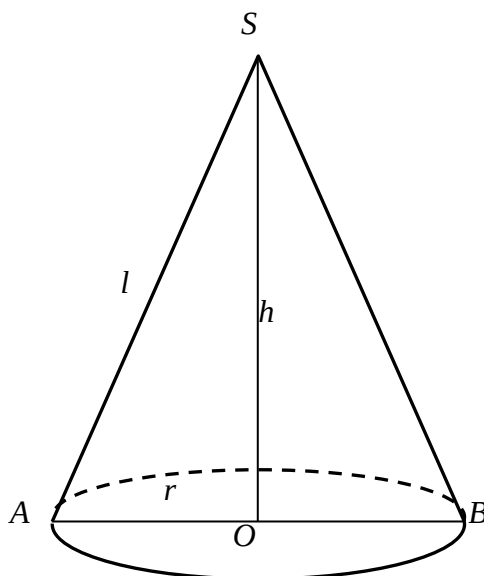
Za ostatni etap **1 punkt** przyznajemy jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I, rozwiąże nierówność i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże co najmniej jedną nierówność z etapu II i poda wszystkie całkowite wartości parametru m , dla których są spełnione warunki zadania.

Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z warunków zadania wynika, że $l + r = 2$, skąd $l = 2 - r$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy $|AS|^2 = |AO|^2 + |OS|^2$, czyli

$$l^2 = r^2 + h^2.$$

Stąd $h = \sqrt{l^2 - r^2}$. Ale $l = 2 - r$, więc

$$h = \sqrt{(2-r)^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r + r^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r} = 2\sqrt{1-r}.$$

Objętość stożka jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2\sqrt{1-r} = \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot \sqrt{1-r} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{r^4(1-r)}.$$

Objętość jest zatem funkcją zmiennej r i jest określona wzorem

$$V(r) = \frac{2}{3} \pi \sqrt{r^4(1-r)} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{r^4 - r^5}.$$

Z warunków geometrycznych zadania wynika, że $0 < r < 1$, a więc dziedziną funkcji V jest przedział $(0,1)$.

Rozważmy funkcję $f(r) = r^4 - r^5$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej r .

Pochodna funkcji f jest równa

$$f'(r) = 4r^3 - 5r^4 = r^3(4 - 5r).$$

Miejscami zerowymi pochodnej są $r = 0$ lub $r = \frac{4}{5}$.

Pochodna funkcji jest ujemna dla $r \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$, a dodatnia dla $r \in \left(0, \frac{4}{5}\right)$.

Zatem w przedziale $\left(0, \frac{4}{5}\right)$ funkcja V jest rosnąca, a w przedziale $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$ malejąca. W punkcie $r = \frac{4}{5}$ osiąga maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą jej wartością. Wartość ta jest równa

$$V\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3} \pi \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{16}{25} \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{32\sqrt{5}}{375} \pi.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- zapisanie wysokości stożka jako funkcji zmiennej r : $h = \sqrt{4-4r}$,
- zapisanie objętości stożka jako funkcji jednej zmiennej: $V(r) = \frac{2}{3} \pi r^2 \sqrt{1-r}$
- określenie dziedziny funkcji: $0 < r < 1$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

Jeśli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu dziedziny albo pominie wyznaczenie dziedziny, ale funkcja objętości zostanie zapisana prawidłowo, to otrzymuje za tę część **2 punkty** i może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.

b) Drugi etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji $f(r) = r^4 - r^5$: $f'(r) = 4r^3 - 5r^4$
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $r = 0$ lub $r = \frac{4}{5}$
- uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V posiada wartość największą dla $r = \frac{4}{5}$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap (1 punkt) – końcowe obliczenia.

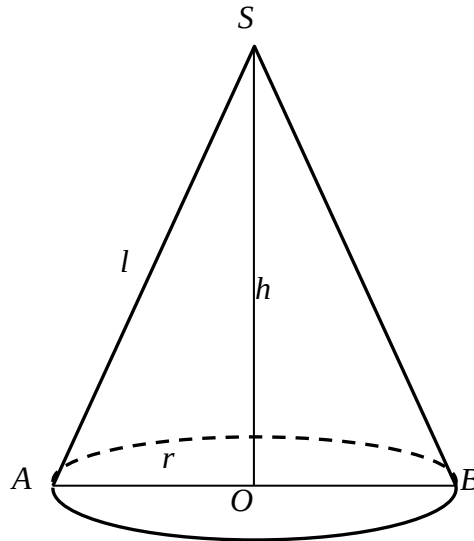
$$\text{Obliczenie objętości stożka dla } r = \frac{4}{5}: V\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi.$$

Uwaga

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.

Przykładowe rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z warunków zadania wynika, że $l + r = 2$, skąd $l = 2 - r$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy $|AS|^2 = |AO|^2 + |OS|^2$, czyli

$$l^2 = r^2 + h^2.$$

Stąd $r^2 = l^2 - h^2$. Ale $l = 2 - r$, więc

$$r^2 = (2 - r)^2 - h^2,$$

$$r^2 = 4 - 4r + r^2 - h^2,$$

$$4r = 4 - h^2,$$

$$r = 1 - \frac{1}{4}h^2.$$

Objętość stożka jest więc równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{4}h^2\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{16}h^4\right) \cdot h = \frac{1}{3}\pi \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right).$$

Objętość jest zatem funkcją zmiennej h i jest określona wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right).$$

Z warunków geometrycznych zadania wynika, że $0 < h < 2$, a więc dziedziną funkcji V jest przedział $(0, 2)$.

Rozważmy funkcję $f(h) = h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej h .

Pochodna funkcji f jest równa

$$f'(h) = 1 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{16}h^4.$$

Miejscami zerowymi pochodnej są $h = -2$ lub $h = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h = 2$.

Pochodna funkcji jest ujemna dla $h \in \left(-2, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2\right)$, a dodatnia dla

$$h \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup (2, +\infty).$$

Zatem w przedziale $\left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ funkcja V jest rosnąca, a w przedziale $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2\right)$ malejąca.

W punkcie $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ osiąga maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą jej wartością. Wartość ta jest równa

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right)$$

$$V\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^3 + \frac{1}{16}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^5\right) = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- zapisanie promienia podstawy stożka jako funkcji zmiennej h : $r = 1 - \frac{1}{4}h^2$,
- zapisanie objętości stożka jako funkcji jednej zmiennej:

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right)$$
- określenie dziedziny funkcji: $0 < h < 2$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

Jeśli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu dziedziny albo pominie wyznaczenie dziedziny, ale funkcja objętości zostanie zapisana prawidłowo, to otrzymuje za tę część **2 punkty** i może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.

b) Drugi etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji $f(h) = h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5$: $f'(h) = 1 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{16}h^4$

- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $h = -2$ lub $h = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h = 2$.
- uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V posiada wartość największą dla $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap (**1 punkt**) – końcowe obliczenia.

Obliczenie objętości stożka dla $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$: $V\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$.

Uwaga

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.