CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2017

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 2. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki, w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych (1.a).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 3. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**D**

Zadanie 4. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 5. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 6. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający oblicza wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (2.e).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**C**

Zadanie 7. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.e).	**D**	**A**

Zadanie 8. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).	**C**	**A**

Zadanie 9. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych (1.a)	**C**	**D**

Zadanie 10. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej (4.i).	**C**	**A**

Zadanie 11. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym (4.n).	**D**	**B**

Zadanie 12. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	**B**	**C**

Zadanie 13. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 14. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (6.c).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**C**

Zadanie 15. (0−1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 16. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**A**

Zadanie 17. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 18. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**C**

Zadanie 19. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**A**

Zadanie 20. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.e).	**A**	**C**

Zadanie 21. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach (9.b).	**A**	**B**

Zadanie 22. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	**B**	**C**

Zadanie 23. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji..	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych (9.b).	**D**	**A**

Zadanie 24. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	**D**	**B**

Zadanie 25. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	**B**	**C**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).

Przykładowe rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

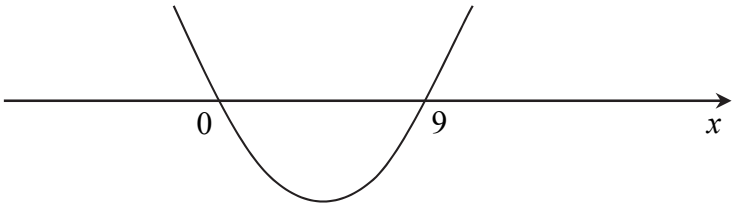
Pierwszy etap rozwiązania polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego $8x^2 - 72x$.
Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $8x^2 - 72x$:

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ lub zaznaczając pierwiastki trójmianu na wykresie

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki: $\Delta = 72^2$, $x_1 = \frac{72-72}{16} = 0$, $x_2 = \frac{72+72}{16} = 9$.

Drugi etap rozwiązania polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań nierówności $8x^2 - 72x \le 0$.
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $0 \le x \le 9$ lub $\langle 0,9 \rangle$ lub $x \in \langle 0,9 \rangle$ np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = 8x^2 - 72x$.



Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 8x^2 - 72x$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd

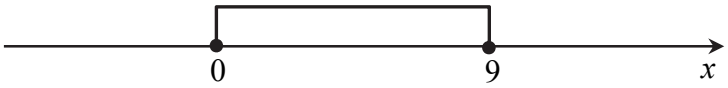
rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $0 \le x \le 9$ lub $\langle 0,9 \rangle$ lub $x \in \langle 0,9 \rangle$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez x, bez podania stosownych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający wyznacza ujemną deltę trójmianu kwadratowego, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$ i zapisze, np. $x \in \langle -9, 0 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 9, 0 \rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).

Przykładowe rozwiązanie

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias $4^{2017}\left(1+4+4^2+4^3\right)$. Doprowadzamy liczbę do postaci $4^{2017}\cdot 5\cdot 17$. Wnioskujemy, że dana liczba jest podzielna przez 17.

Schemat punktowania

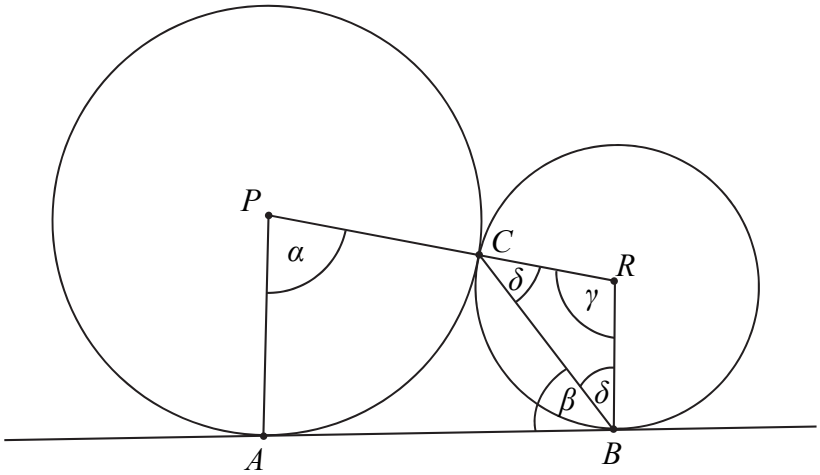
Zdający otrzymuje ..... 1 p.
gdy zapisze liczbę $4^{2017}+4^{2018}+4^{2019}+4^{2020}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 4^k, gdzie $1985\le k\le 2017$, np. $4^{2017}\left(1+4+4^2+4^3\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ..... 2 p.
gdy przeprowadzi poprawny dowód.

Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R, więc $\left|\sphericalangle ABR\right|=90^\circ$. Stąd

$$\delta=\left|\sphericalangle CBR\right|=90^\circ-\beta.$$

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta .$$

Zatem

$$|\sphericalangle BRC| = \gamma = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta .$$

Suma miar kątów czworokąta $ABRP$ jest równa 360°, $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$, więc

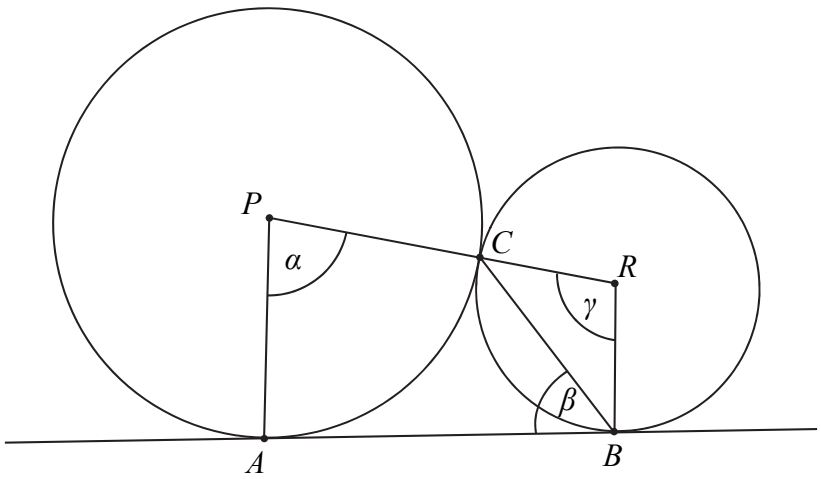
$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BRP| + |\sphericalangle RPA| = 360^\circ ,$$

czyli

$$90^\circ + 90^\circ + 2\beta + \alpha = 360^\circ ,$$
$$\alpha + 2\beta = 180^\circ ,$$
$$\alpha = 180^\circ - 2\beta .$$

To kończy dowód.

<u>II sposób</u>



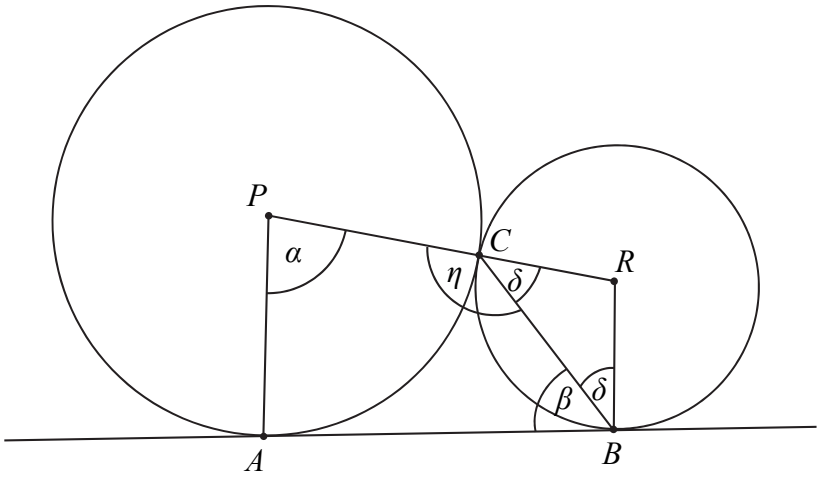
Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że $|\sphericalangle BRC| = \gamma = 2\beta$.

Ponieważ $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$, więc czworokąt $ABRP$ jest trapezem o podstawach AP i BR. Suma miar kątów przy ramieniu trapezu jest równa 180°, więc

$$\alpha + \gamma = 180^\circ ,$$
$$\alpha + 2\beta = 180^\circ .$$

Stąd $\alpha = 180^\circ - 2\beta$. To kończy dowód.

III sposób



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R, więc $|\sphericalangle ABR| = 90°$. Stąd

$$\delta = 90° - \beta .$$

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90° - \beta .$$

Kąty BCR i PCB są przyległe, więc

$$\eta = 180° - |\sphericalangle BCR| = 180° - (90° - \beta) = 90° + \beta .$$

Suma miar kątów czworokąta $ABCP$ jest równa $360°$, $|\sphericalangle PAB| = 90°$, więc

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle CPA| = 360° ,$$

czyli

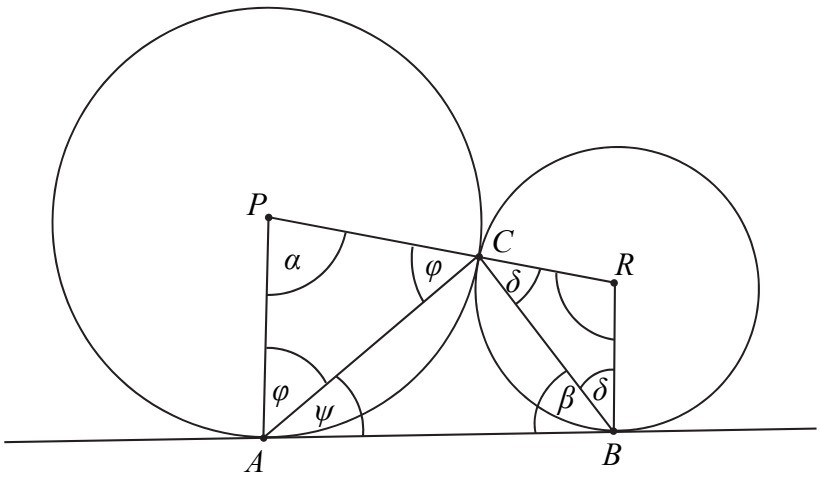
$$90° + \beta + \eta + \alpha = 360° ,$$

$$90° + \beta + (90° + \beta) + \alpha = 360° ,$$

$$\alpha = 180° - 2\beta .$$

To kończy dowód.

IV sposób



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R, więc $|\sphericalangle ABR| = 90°$.

Stąd $\delta = 90° - \beta$.

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90° - \beta.$$

Trójkąt PAC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA| = \varphi = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Prosta AB jest styczna w punkcie A do okręgu o środku P, więc $|\sphericalangle PAB| = 90°$. Stąd

$$|\sphericalangle CAB| = \psi = 90° - \varphi = 90° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Miara kąta ACB w trójkącie ABC jest równa

$$|\sphericalangle ACB| = 180° - \beta - \psi = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2}.$$

Suma miar kątów PCA, ACB i BCR jest równa 180°, więc

$$|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCR| = 180°,$$

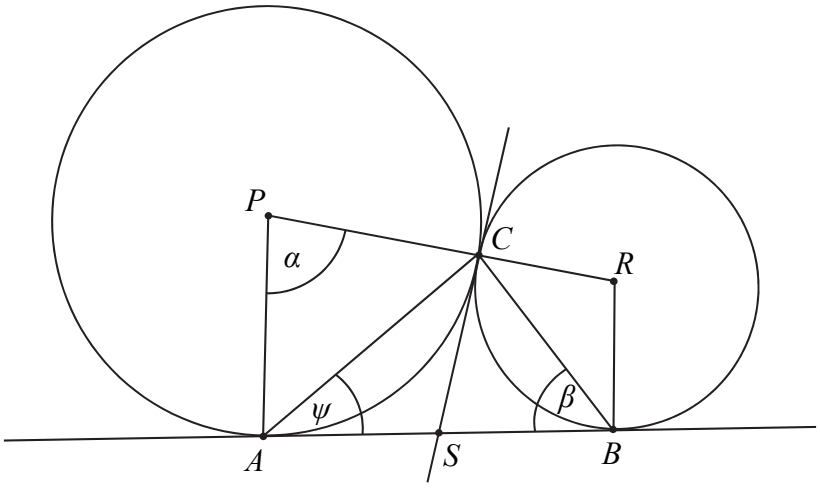
$$\varphi + \left(180° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + \delta = 180°,$$

$$90° - \frac{\alpha}{2} + \left(180° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + 90° - \beta = 180°,$$

$$\alpha = 180° - 2\beta.$$

To kończy dowód.

<u>V sposób</u>



Poprowadźmy przez punkt C wspólną styczną do obu okręgów. Niech S oznacza punkt jej przecięcia z prostą AB.

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że

$$\psi = \frac{\alpha}{2}.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|AS| = |CS| = |BS|$. Stąd wynika, że S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Odcinek AB jest średnicą tego okręgu, więc trójkąt ABC jest prostokątny. Suma miar jego kątów ostrych jest równa $90°$, czyli

$$\beta + \psi = 90°.$$

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = 90°,$$

$$\alpha = 180° - 2\beta.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy zapisze układ warunków wystarczający do udowodnienia równości $\alpha = 180° - 2\beta$, np.:

- $\delta = 90° - \beta$ i $2\delta + \gamma = 180°$ i $\alpha + \gamma + 90° + 90° = 360°$

lub

- $\gamma = 2\beta$ i $\alpha + \gamma = 180°$,

lub

- $\delta = 90° - \beta$ i $\eta = 180° - \delta$ i $90° + \beta + \eta + \alpha = 360°$,

lub

- $\delta = 90° - \beta$ i $\varphi = 90° - \frac{\alpha}{2}$ i $\psi = 90° - \varphi$ i $180° - (\beta + \psi) = 180° - (\varphi + \delta)$,

lub

- $\beta + \psi = 90°$ i $\psi = \frac{\alpha}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej (4.i).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Ponieważ $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$, stąd wartość $p=\frac{-6+0}{2}=-3$.

Zatem $f(x)=a(x-p)^2+q$ dla $p=-3$ i $q=6$.

Obliczamy współczynnik *a*. Wiemy, że $f(0)=\frac{3}{2}$, zatem

$$a(0+3)^2+6=\frac{3}{2},$$

$$9a=-\frac{9}{2},$$

$$a=-\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $a=-\frac{1}{2}$.

II sposób

Z treści zadania wynika, że $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} 36a-6b+c=\frac{3}{2} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} b=6a \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka:

$$p=-\frac{b}{2a}=-\frac{6a}{2a}=-3.$$

Stąd wynika, że $f(-3)=6$ i $f(x)=ax^2+6ax+\frac{3}{2}$. Obliczamy współczynnik *a*

$$a(-3)^2+6a\cdot(-3)+\frac{3}{2}=6,$$

$$-9a=\frac{9}{2},$$

$$a=-\frac{1}{2}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.

Zdający

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka: np. $p=\frac{-6+0}{2}=-3$

albo

- zapisze układ dwóch równań, np.: $\begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2}, \end{cases}$

albo

- zapisze wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-p)^2+q$ oraz zapisze $q=6$,

albo

- zapisze równanie $-\frac{\Delta}{4a}=6$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.

Zdający

- zapisze wzór funkcji *f* w postaci: $f(x)=a(x+3)^2+6$

albo

- zapisze układ trzech równań z niewiadomymi *a*, *b*, *c*, np.:

$$\begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2} \\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2} \\ a(-3)^2+b(-3)+c=6 \end{cases}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą *a*,
  np.: $a(0+3)^2+6=\frac{3}{2}$ lub $a(-3)^2+6a\cdot(-3)+\frac{3}{2}=6$, lub $36a^2+18a=0$

albo

- obliczy wartości *b* i *c*: $b=-3$, $c=\frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.

Zdający obliczy wartość współczynnika *a*: $a=-\frac{1}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby -6 i 0 jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa $4\frac{1}{2}$, to może otrzymać **4 punkty**, o ile w rozwiązaniu nie występują błędy.
2. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby -6 i 0 jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa 6, to może otrzymać **1 punkt**, o ile poprawnie wyznaczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

Zadanie 30. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej przez *x*. Wtedy dłuższa przyprostokątna ma długość $x+14$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$x^2+(x+14)^2=26^2,$$

$$x^2+x^2+28x+196=676,$$

$$x^2+14x-240=0$$

Stąd

$$x=10 \text{ lub } x=-24.$$

Drugie z rozwiązań odrzucamy, zatem długości boków trójkąta są równe: 10, 24, i 26, więc obwód jest równy 60 cm.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy:

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $x^2+(x+14)^2=26^2$, gdzie *x* jest długością krótszej przyprostokątnej

albo

- zapisze układ równań, np.: $a^2+b^2=26^2$ i $b=a+14$, gdzie *a* jest długością krótszej oraz *b* długością dłuższej przyprostokątnej

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy obliczy obwód trójkąta: 60 cm.

Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60 oraz uzasadni, że rozważany trójkąt jest prostokątny, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający podaje w rozwiązaniu tylko liczby 10, 24, 26, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).

Przykładowe rozwiązanie

Wyznaczamy różnicę *r* ciągu arytmetycznego.

W tym celu stosujemy wzory na sumę częściową $S_3 = 3a_1 + 3r = 33$ i $a_1 = 8$ lub zapisujemy równanie $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 33$.

Obliczamy *r*: $r = 3$.

Następnie obliczamy różnicę $a_{16} - a_{13}$, jako $3r$ lub po wyznaczeniu a_{16} i a_{13}, czyli $a_{16} = 8 + 15 \cdot 3 = 53$, $a_{13} = 8 + 12 \cdot 3 = 44$.

Zatem $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy obliczy różnicę ciągu $r = 3$ (lub $3r = 9$) lub obliczy wartość $a_1 + r = 11$, lub obliczy wartość $a_2 = 11$, lub zapisze, że $a_{16} - a_{13} = 3r$, lub obliczy $a_3 = 14$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy obliczy różnicę $a_{16} - a_{13} = 9$.

Uwagi

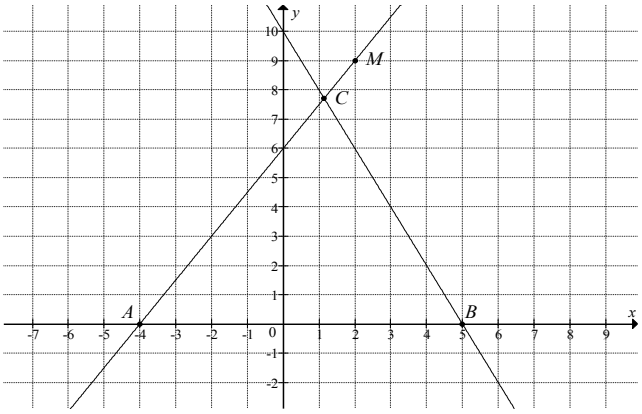
1. Jeśli zdający przyjmuje $n = 33$ lub $a_3 = 33$ i nie przedstawia poprawnej metody obliczenia różnicy $a_{16} - a_{13}$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda wartość $r = 3$ i zapisze $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zamiast ciągu arytmetycznego rozważa ciąg geometryczny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 32. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym oraz interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.b, 8.d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Prosta AM przechodzi przez punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$, więc jej równanie ma postać

$$y=\frac{9}{2+4}(x+4)\text{, czyli } y=\frac{3}{2}x+6\,.$$

Prosta k o równaniu $y=-2x+10$ przecina oś Ox w punkcie B, więc $B=(5,0)$.

Zatem $|AB|=|5-(-4)|=9$.

Współrzędne punktu C obliczymy, rozwiązując układ równań:

$$y=\frac{3}{2}x+6 \text{ i } y=-2x+10\,.$$

Stąd

$$\frac{3}{2}x+6=-2x+10\,,$$

$$\frac{7}{2}x=4\,,$$

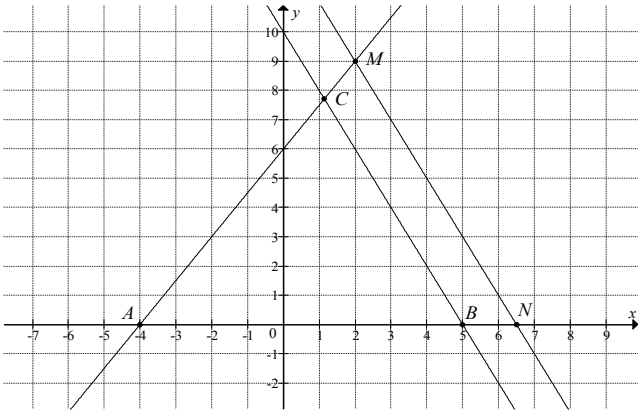
$$x=\frac{8}{7}\text{, a } y=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{7}+6=\frac{12}{7}+6=\frac{54}{7}$$

Zatem $C=\left(\frac{8}{7},\frac{54}{7}\right)$. Wynika stąd, że wysokość h trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C na podstawę AB jest równa $h=y_C=\frac{54}{7}$.

Zatem pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{54}{7}=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}\,.$$

II sposób



Wyznaczamy równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $M=(2,9)$:

$$y=-2(x-2)+9,$$
$$y=-2x+13.$$

Niech N będzie punktem przecięcia prostej l z osią Ox, więc $N=\left(\frac{13}{2},0\right)$. Zatem

$$|AN|=\left|\frac{13}{2}-(-4)\right|=\frac{21}{2}.$$

Prosta k o równaniu $y=-2x+10$ przecina oś Ox w punkcie B, więc $B=(5,0)$.

Zatem $|AB|=|5-(-4)|=9$.

Z równoległości prostych k i l wynika, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta ANM, a skala tego podobieństwa jest równa

$$s=\frac{|AB|}{|AN|}=\frac{9}{\frac{21}{2}}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}.$$

Pole trójkąta ANM jest równe

$$P_{ANM}=\frac{1}{2}|AN|\cdot 9=\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot 9=\frac{21\cdot 9}{4},$$

więc pole trójkąta ABC jest równe

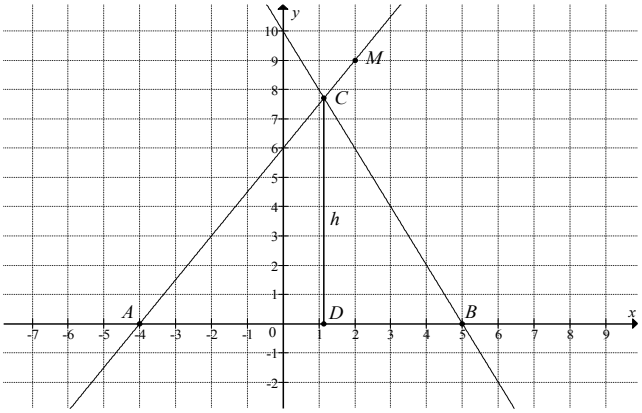
$$P_{ABC}=s^2\cdot P_{ANM}=\left(\frac{6}{7}\right)^2\cdot\frac{21\cdot 9}{4}=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}.$$

Uwaga

Mając obliczone współrzędne wierzchołków trójkąta, możemy obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|(5+4)\left(\frac{54}{7}-0\right)-0\cdot\left(\frac{8}{7}+4\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|9\cdot\frac{54}{7}\right|=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}.$$

III sposób



Prosta k o równaniu $y=-2x+10$ przecina oś Ox w punkcie B, więc $B=(5,0)$.

Zatem $|AB|=|5-(-4)|=9$.

Niech $h=|CD|$. Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej k jest równy -2, więc

$$|DA|=\frac{1}{2}h.$$

Zatem $|AD|=9-\frac{1}{2}h$.

Współczynnik kierunkowy prostej AM jest równy $a_{AM}=\frac{9-0}{2-(-4)}=\frac{3}{2}$, ale $a_{AM}=\frac{|CD|}{|AD|}$, więc

$$\frac{|CD|}{|AD|}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{h}{9-\frac{1}{2}h}=\frac{3}{2},$$

$$2h=27-\frac{3}{2}h,$$

$$\frac{7}{2}h=27,$$

$$h=\frac{54}{7}.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{54}{7}=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.
Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej *AM*: $a = \frac{3}{2}$

albo

- wyznaczy współrzędne punktu *B*: $B = (5,0)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.

Zdający

- zapisze równanie prostej *AM*: $y = \frac{3}{2}x + 6$

albo

- wyznaczy równanie prostej *MN*: $y = -2x + 13$ i zapisze, że trójkąty *ABC* i *ANM* są podobne,

albo

- zapisze zależność między długościami odcinków *CD* i *DA*: $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.
Zdający

- obliczy długość podstawy *AB* trójkąta: $|AB| = 9$ oraz zapisze równanie, z którego można wyznaczyć jedną ze współrzędnych punktu *C*

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka *C*: $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$ (lub drugą współrzędną tego punktu) i nie zapisze współrzędnych punktu *B*,

albo

- obliczy skalę podobieństwa trójkąta *ABC* do trójkąta *ANM*: $s = \frac{6}{7}$ (lub skalę podobieństwa trójkąta *ANM* do trójkąta *ABC* : $s_1 = \frac{7}{6}$),

albo

- obliczy pole trójkąta *ANM*: $P_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9$ i zapisze, że $P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM}$, gdzie *s* oznacza skalę podobieństwa trójkąta *ABC* do trójkąta *ANM*,

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, z którego można obliczyć wysokość trójkąta *ABC*, np.: $\frac{h}{9 - \frac{1}{2}h} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.
Zdający

- obliczy drugą współrzędną wierzchołka C oraz długość podstawy AB trójkąta ABC: $y_C = \frac{54}{7}$, $|AB| = 9$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołków B i C: $B = (5,0)$, $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$,

albo

- obliczy skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta ANM: $s = \frac{6}{7}$ (lub skalę podobieństwa trójkąta ANM do trójkąta ABC : $s_1 = \frac{7}{6}$) oraz pole trójkąta ANM: $P_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9$ i zapisze, że $P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM}$,

albo

- obliczy wysokość CD trójkąta ABC: $h = \frac{54}{7}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 5 p.
Zdający obliczy pole trójkąta ABC: $P_{ABC} = \frac{243}{7}$.

Uwaga
Akceptujemy, jeżeli zdający poda pole trójkąta w przybliżeniu, np. 34,714.

Zadanie 33. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń. (10.d).

Przykładowe rozwiązanie
Jest to model klasyczny i liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 90$.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to zbiór wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne

$$A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}.$$

Stąd $|A| = 10$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3, jest równe $\frac{1}{9}$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy

- zapisze, że $|\Omega| = 90$

albo

- zapisze, że $|A| = 10$ i nie wskazuje przy tym niepoprawnych zdarzeń elementarnych

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:
  $12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i wynik zapisze w postaci ułamka:

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.

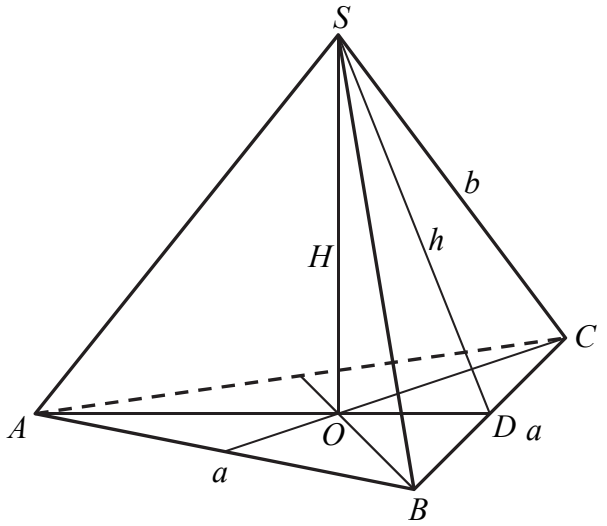
Uwaga

1. Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik $P(A)$ jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli w przedstawionym rozwiązaniu zdający interpretuje zdarzenie elementarne jako rezultat wylosowania więcej niż jednej liczby, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu zapisze tylko $\frac{1}{9}$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 34. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).

Przykładowe rozwiązanie
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wykorzystujemy wzór na pole powierzchni bocznej ostrosłupa i zapisujemy równanie

$$\frac{15\sqrt{3}}{4}=3\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{5\sqrt{3}}{4}\text{, skąd otrzymujemy } a=2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DOS otrzymujemy

$$H^2=h^2-|DO|^2.$$

Ponieważ $|DO|=\frac{1}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc

$$H^2=\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Stąd $H=\frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$.

Zatem objętość ostrosłupa jest równa

$$V=\frac{1}{3}P_p\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{209}}{12}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.
Zdający

- zapisze równanie $\frac{15\sqrt{3}}{4}=3\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{5\sqrt{3}}{4}$

albo

- zapisze, że $|DO| = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $|AO| = \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.
Zdający

- obliczy długość krawędzi a podstawy ostrosłupa: $a = 2$ i zapisze równanie z niewiadomą H, np.: $H^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

albo

- obliczy długość krawędzi a podstawy ostrosłupa: $a = 2$ i zapisze układ równań wystarczający do obliczenia wysokości ostrosłupa, np.: $\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 = b^2 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ..... 4 p.

Zdający obliczy objętość V ostrosłupa: $V = \frac{\sqrt{209}}{12}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozważa inną bryłę niż podana w treści zadania, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.
3. Jeżeli zdający poda długość krawędzi podstawy $a = 2$ bez obliczeń i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie przepisze liczbę $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ lub liczbę $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ i z tym błędem rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeśli zdający nie obliczy a i przyjmuje, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.