

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

sierpień 2013

Poziom Podstawowy

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	D	A	B	D	C	B	B	C	C	B	A	C	D	D	C	B	C	A	D	D	C	B	D	B	B

Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x - x^2 \geq 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2 + 3x$:

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie
 $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ lub $-x(x-3)$

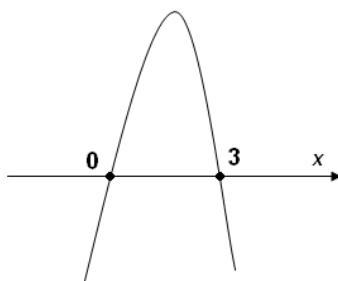
albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 9. \text{ Stąd } x_1 = \frac{-3-3}{-2} = 3 \text{ oraz } x_2 = \frac{-3+3}{-2} = 0.$$

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $0 \leq x \leq 3$ lub $\langle 0, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 0, 3 \rangle$ np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$.



Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-x(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójkątnu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

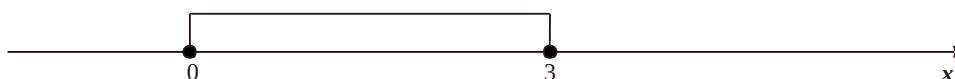
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle 0, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 0, 3 \rangle$ lub $x \geq 0$ i $x \leq 3$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \geq 0$, $x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Kryteria

oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójkątnu $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $x \in \langle 0, -3 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 3, 0 \rangle$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = 0$.

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów:

$$x(x^2 - 12) - 6(x^2 - 12) = 0 \quad \text{lub} \quad x^2(x - 6) - 12(x - 6) = 0$$

$$(x - 6)(x^2 - 12) = 0.$$

$$\text{Stąd } x = 6 \text{ lub } x = -2\sqrt{3} \text{ lub } x = 2\sqrt{3}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np. $(x - 6)(x^2 - 12)$,

$(x - 6)(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12})$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = 6$ lub $x = -2\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba 6 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 6x^2 - 12x + 72$. Dzielimy wielomian $x^3 - 6x^2 - 12x + 72$ przez dwumian $(x - 6)$. Otrzymujemy iloraz $(x^2 - 12)$.

Zapisujemy równanie w postaci $(x - 6)(x^2 - 12) = 0$. Stąd $(x - 6)(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0$ zatem $x = 6$ lub $x = -\sqrt{12}$ lub $x = \sqrt{12}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy podzieli wielomian $x^3 - 6x^2 - 12x + 72$ przez dwumian $(x - 6)$, otrzyma iloraz $(x^2 - 12)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = 6$ lub $x = -\sqrt{12}$ lub $x = \sqrt{12}$

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

I sposób rozwiązania

Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ przez $\cos \alpha$ i wykorzystując zależność

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ otrzymujemy } \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

II sposób rozwiązania

Wykorzystując zależność $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ zapisujemy $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$.

Przekształcamy $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$, podstawiamy do wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3}.$$

III sposób rozwiązania

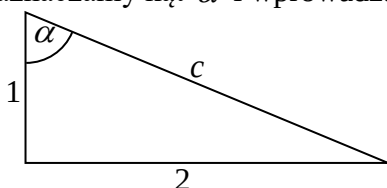
Wykorzystując zależność $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ zapisujemy $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$.

Przekształcamy $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{2}$, podstawiamy do wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{2}}{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{2}} = \frac{\frac{2 \sin \alpha - \sin \alpha}{2}}{\frac{2 \sin \alpha + \sin \alpha}{2}} = \frac{2 \sin \alpha - \sin \alpha}{2} \cdot \frac{2}{2 \sin \alpha + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{3 \sin \alpha} = \frac{1}{3}.$$

IV sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, zaznaczamy kąt α i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, zapisujemy

$$\sin \alpha = \frac{2}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{c}.$$

Podstawiając $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, wyznaczamy wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{2}{c} - \frac{1}{c}}{\frac{2}{c} + \frac{1}{c}} = \frac{\frac{2-1}{c}}{\frac{2+1}{c}} = \frac{1}{3}.$$

Schemat oceniania I, II, III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- podzieli licznik i mianownik ułamka $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ przez $\cos \alpha$, zapisze ten ułamek w postaci $\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{2 \cos \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha + \cos \alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{2}$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{\sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{2}}{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{2}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\sin \alpha = \frac{2}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\cos \alpha = \frac{1}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 2, obliczy długość przeciwprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α i obliczy sinus lub cosinus tego kąta, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pktgdy poprawnie wyznaczy wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} : \frac{1}{3}$.**Uwagi**

1. Jeśli zdający przyjmie, że $\sin \alpha = 2$ i $\cos \alpha = 1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt α na przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
3. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\operatorname{tg} \alpha = 2$: $\alpha = 63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ = 0,8910$ lub $\cos 63^\circ = 0,4540$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\operatorname{tg} \alpha = 2$: $\alpha = 63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ = 0,8910$ lub $\cos 63^\circ = 0,4540$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \approx 0,3249$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\operatorname{tg} \alpha = 2$: $\alpha = 64^\circ$ oraz zapisze $\sin 64^\circ = 0,8988$ lub $\cos 64^\circ = 0,4384$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \approx 0,3443$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 29. (2 pkt)

W tabeli zestawiono oceny z matematyki uczniów klasy 3A na koniec semestru.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	4	9	13	x	1

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,6. Oblicz liczbę x ocen bardzo dobrych (5) z matematyki wystawionych na koniec semestru w tej klasie.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen zestawionych w tabeli

$$\frac{0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1}.$$

Ponieważ ta średnia arytmetyczna jest równa 3,6. Zatem otrzymujemy równanie

$$\frac{0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1} = 3,6.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{5x + 93}{x + 27} &= \frac{18}{5} \\ 5(5x + 93) &= 18(x + 27), \\ 25x + 465 &= 18x + 486, \\ 7x &= 21, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd, np.:

$$\frac{0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1} = 3,6 \quad \text{lub} \quad \frac{4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1} = 3,6$$

albo

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych, ale popełni błąd przy przepisywaniu danych.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy liczbę ocen bardzo dobrych: 3.

Uwaga

Jeśli zdający odgadnie, że liczba ocen bardzo dobrych jest równa 3, i sprawdzi to, wykonując odpowiednie obliczenia, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeżeli a jest liczbą rzeczywistą różna od zera i $a + \frac{1}{a} = 3$ to $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$.

I sposób rozwiązania

Równość $a + \frac{1}{a} = 3$ podnosimy obustronnie do kwadratu i przekształcamy równoważnie

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 9,$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 9 - 2.$$

$$\text{Stąd } a^2 + \frac{1}{a^2} = 7.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**Zdający otrzymuje 1 pkt**

gdy podniesie równość obustronnie do kwadratu: $a + \frac{1}{a} = 3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2 + \frac{1}{a^2} : 7$.

II sposób rozwiązania

Wyrażenie $a^2 + \frac{1}{a^2}$ zapisujemy w postaci $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$.

Zatem $a^2 + \frac{1}{a^2} = 9 - 2 = 7$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**Zdający otrzymuje 1 pkt**

gdy zapisze zależność między sumą $a^2 + \frac{1}{a^2}$, a kwadratem sumy $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2 + \frac{1}{a^2} : 7$.

Zadanie 31. (2 pkt)

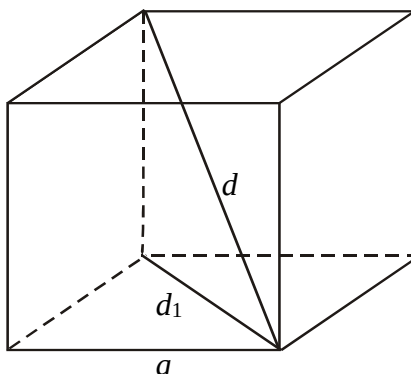
Długość krawędzi sześcianu jest o 2 krótsza od długości jego przekątnej. Oblicz długość przekątnej tego sześcianu.

I sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:

a – długość krawędzi sześcianu,

d_1 – długość przekątnej podstawy sześcianu,



d – długość przekątnej sześcianu.

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy: $a^2 + a^2 = d_1^2$ oraz $a^2 + d_1^2 = d^2$.

Stąd $d = a\sqrt{3}$ lub $a = \frac{\sqrt{3}}{3}d$.

Ponieważ $d = a + 2$ rozwiązujemy równanie:

- $d = \frac{\sqrt{3}}{3}d + 2$ i otrzymujemy $d = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d = 3 + \sqrt{3}$

albo

- $a\sqrt{3} = a + 2$ i otrzymujemy $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ lub $a = 1 + \sqrt{3}$.

Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu: $d = 3 + \sqrt{3}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej $d = \frac{\sqrt{3}}{3}d + 2$ lub $a\sqrt{3} = a + 2$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

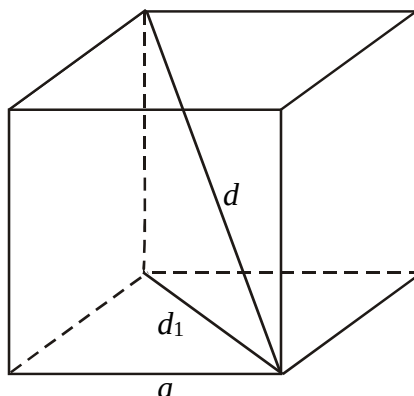
gdy obliczy długość przekątnej: $d = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d = 3 + \sqrt{3}$.

II sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:

a – długość krawędzi sześcianu,

d – długość przekątnej sześcianu.



Korzystamy z zależności $d = a\sqrt{3}$.

Ponieważ $a = d - 2$ rozwiązujemy równanie:

- $d = (d - 2)\sqrt{3}$ i otrzymujemy $d\sqrt{3} - d = 2\sqrt{3}$ lub $d(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3}$.

Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu: $d = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

lub $d = 3 + \sqrt{3}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej $d = (d-2)\sqrt{3}$ lub $d\sqrt{3} - d = 2\sqrt{3}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy prawidłowo obliczy długość przekątnej: $d = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d = 3 + \sqrt{3}$ lub

$$d = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) \text{ lub } d = \frac{12 + \sqrt{48}}{4}.$$

Zadanie 32. (5 pkt)

Dane są dwie prostokątne działki. Działka pierwsza ma powierzchnię równą 6000 m^2 . Działka druga ma wymiary większe od wymiarów pierwszej działki o 10 m i 15 m oraz powierzchnię większą o 2250 m^2 . Oblicz wymiary pierwszej działki.

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchni działki pierwszej jest równe $x \cdot y$. Stąd mamy równanie $x \cdot y = 6000$.

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000 + 2250 = 8250$. Otrzymujemy zatem równanie $(x+10) \cdot (y+15) = 8250$.

Zapisujemy układ równań
$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10) \cdot (y+15) = 8250 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$y = \frac{6000}{x}$	$x = \frac{6000}{y}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(x+10)\left(\frac{6000}{x} + 15\right) = 8250$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $x^2 - 140x + 4000 = 0$. $\Delta = 19600 - 16000 = 3600 = 60^2$ $x_1 = \frac{140 - 60}{2} = 40 \text{ lub } x_2 = \frac{140 + 60}{2} = 100$ Obliczamy y:	$\left(\frac{6000}{y} + 10\right)(y+15) = 8250$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $y^2 - 210y + 9000 = 0$. $\Delta = 44100 - 36000 = 8100 = 90^2$ $y_1 = \frac{210 - 90}{2} = 60 \text{ lub } y_2 = \frac{210 + 90}{2} = 150$ Obliczamy x:

Schemat oceniania sierpień
Poziom podstawowy

$y_1 = \frac{6000}{40} = 150$ lub $y_2 = \frac{6000}{100} = 60$.	$x_1 = \frac{6000}{60} = 100$ lub $x_2 = \frac{6000}{150} = 40$.
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

II sposób rozwiązania

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchni działki pierwszej jest równe $x \cdot y$. Stąd mamy równanie $x \cdot y = 6000$

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000+2250=8250$.

Otrzymujemy zatem równanie $(x+10) \cdot (y+15) = 8250$

Zapisujemy układ równań
$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10) \cdot (y+15) = 8250 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy kolejno
$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ x \cdot y + 15x + 10y + 150 = 8250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ 6000 + 15x + 10y + 150 = 8250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ 15x + 10y - 2100 = 0 \end{cases}$$

Równanie $15x + 10y - 2100 = 0$ dzielimy obustronnie przez 5.

Otrzymujemy $3x + 2y - 420 = 0$, stąd wyznaczamy

$y = -\frac{3}{2}x + 210$	$x = -\frac{2}{3}y + 140$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$x \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 210\right) = 6000$ $-\frac{3}{2}x^2 + 210x - 6000 = 0$ $x^2 - 140x + 4000 = 0$ $\Delta = 19600 - 16000 = 3600 = 60^2$ $x_1 = \frac{140-60}{2} = 40 \text{ lub } x_2 = \frac{140+60}{2} = 100$ Obliczamy y: $y_1 = \frac{6000}{40} = 150 \text{ lub } y_2 = \frac{6000}{100} = 60.$	$\left(-\frac{2}{3}y + 140\right) \cdot y = 6000$ $-\frac{2}{3}y^2 + 140y - 6000 = 0$ $y^2 - 210y + 9000 = 0$ $\Delta = 44100 - 36000 = 8100 = 90^2$ $y_1 = \frac{210-90}{2} = 60 \text{ lub } y_2 = \frac{210+90}{2} = 150$ Obliczamy x: $x_1 = \frac{6000}{60} = 100 \text{ lub } x_2 = \frac{6000}{150} = 40.$
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt**

Zapisanie jednego z równań: $x \cdot y = 6000$ albo $(x+10) \cdot (y+15) = 8250$, gdzie x, y oznaczają długości boków pierwszej działki.

Uwaga

Nie wymagamy opisanie wprowadzonych oznaczeń, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y
$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10) \cdot (y+15) = 8250 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y , np:

$$(x+10) \left(\frac{6000}{x} + 15 \right) = 8250 \text{ lub } \left(\frac{6000}{y} + 10 \right) (y+15) = 8250 \text{ lub } x \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 210 \right) = 6000 \text{ lub}$$

$$\left(-\frac{2}{3}y + 140 \right) \cdot y = 6000 \text{ lub } x^2 - 140x + 4000 = 0 \text{ lub } y^2 - 210y + 9000 = 0.$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą i wówczas jego rozwiązanie zostanie zakwalifikowane co najmniej do kategorii *Pokonanie zasadniczych trudności*.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą x i nieobliczenie drugiego boku działki,
albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą y i nieobliczenie pierwszego boku działki,
albo
- popełnienie błędu rachunkowego w rozwiązaniu równania z jedną niewiadomą (ale otrzymanie dwóch rozwiązań) i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie wymiarów działek,
albo
- obliczenie wymiarów działki tylko w jednym przypadku.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie wymiarów działki pierwszej: działka pierwsza ma wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.

Uwaga

Jeżeli zdający odgadnie wymiary działki w co najmniej jednym przypadku, to otrzymuje **1 punkt**, nawet w sytuacji, gdy dokonuje systematycznego „przeszukiwania” rozwiązań całkowitych.

Zadanie 33. (4 pkt)

Punkty $A = (-1, -5)$, $B = (3, -1)$ i $C = (2, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = x - 4$.

Wyznaczamy równanie prostej CE prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C :
 $y = -x + 6$

Obliczamy współrzędne punktu E (przecięcia prostych AB i CE) rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest: $x = 5$, $y = 1$. Stąd $E = (5, 1)$.

Obliczamy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Obliczamy długość odcinka CE : $|CE| = \sqrt{(5-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Zatem pole równoległoboku jest równe: $P_{ABCD} = |AB| \cdot |CE| = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Obliczenie długości odcinka: $|AB| = 4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu E : $E = (5, 1)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie wysokości równoległoboku: $|CE| = 3\sqrt{2}$.

Uwaga

Zdający może obliczyć wysokość równoległoboku wykorzystując wzór na odległość wierzchołka C od prostej AB .

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD} = 24$.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że pole równoległoboku $ABCD$ jest równe podwojonemu polu trójkąta ABC .

Pole trójkąta ABC obliczamy ze wzoru: $P_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$.

Obliczamy pole równoległoboku:

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= 2 \cdot P_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} |(3 - (-1))(4 - (-5)) - (-1 - (-5))(2 - (-1))| = |4 \cdot 9 - 4 \cdot 3| = |24| = 24. \end{aligned}$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Zauważenie, że $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zastosowanie wzoru na pole trójkąta: $P_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

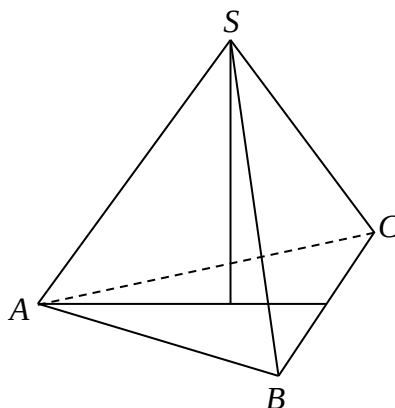
Obliczenie pola trójkąta: 12

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD} = 24$.

Zadanie 34. (4 pkt)

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ (tak jak na rysunku) jest równa 72, a promień okręgu wpisanego w podstawę ABC tego ostrosłupa jest równy 2. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa i jego ścianą boczną.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy:

a – długość boku trójkąta równobocznego ABC , w który wpisano okrąg o promieniu $r = 2$,
 H – wysokość tego ostrosłupa,

α – miara kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną.

Ponieważ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, to $a = 4\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest równa 72, zatem

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 72.$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa H : $\frac{48\sqrt{3}}{12} \cdot H = 72$, stąd $H = \frac{72}{4\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$.

Zauważamy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{H}$, stąd $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zaznaczenie kąta α między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną lub wybór właściwego kąta do dalszych obliczeń.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości boku trójkąta ABC : $a = 4\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $ABCS$: $H = 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie tangensa kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$.