



Materiały diagnostyczne z matematyki poziom podstawowy

luty 2012

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych schemat oceniania

Materiały diagnostyczne przygotował zespół w składzie:

Agnieszka Salaj

Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Białymstoku

Anna Rybak

Pracownik Uniwersytetu w Białymstoku

Artur Miśkiewicz

Nauczyciel i Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Iławie
Wicedyrektor Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Iławie

Cezary Kacprzyk

Nauczyciel III Liceum Ogólnokształcącego im. Alfreda Lityńskiego w Zespole Szkół nr 1 w Suwałkach

Dorota Mozyrska

Pracownik Politechniki Białostockiej

Elżbieta Guziejko

Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku

Ewa Olszewska

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku

Ewa Pawłuszewicz

Pracownik Politechniki Białostockiej

Ewa Ziętek

Nauczyciel II Liceum Ogólnokształcącego im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie
Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie

Irena Jakóbowska

Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie
Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

Tomasz Chomicz

Nauczyciel w Zespole Szkół Ogólnokształcących i Zawodowych im. Jarosława Iwaszkiewicza w Ciechanowcu

Agata Siwik

Starszy ekspert ds. egzaminu maturalnego z matematyki w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej
Kierownik Zespołu Matematyczno-Przyrodniczego w Wydziale Sprawdzianów, Egzaminów Gimnazjalnych i Matur
w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Łomży

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
odpowiedź	C	A	B	A	B	C	D	C	C	B	C	D	A	B	A	D	C	D	B	D	A	D	B	C

Schemat punktowania zadań otwartych

Zadanie 25. (2 pkt)

Rozwiąż równanie $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$ dla $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Mnożymy równanie $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$ obustronnie przez $6x$ i zapisujemy równanie kwadratowe $2x^2 - 15x + 18 = 0$.

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 15x + 18$

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 225 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 81 \text{ i stąd } x_1 = \frac{15-9}{4} = \frac{3}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{15+9}{4} = 6$$

albo

- stosujemy wzory Viete'a:

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{2} \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = 9 \text{ i stąd } x_1 = \frac{3}{2} \text{ oraz } x_2 = 6.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy

- poprawnie przekształci równanie $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$ do równania kwadratowego $2x^2 - 15x + 18 = 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- zapisze równanie kwadratowe z błędem i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże równanie.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy poprawnie wyznaczy oba pierwiastki równania: $x_1 = \frac{3}{2}$ oraz $x_2 = 6$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający przekształcając równanie $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$ otrzyma równanie liniowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie kwadratowe z błędem i jeden z pierwiastków będzie równy 0, to za takie rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 26. (2 pkt)

Wykaż, że jeśli $x > 0$ i $y > 0$, to $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$.

I sposób rozwiązania

Przekształcamy nierówność $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$ do postaci $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$.

Sprowadzamy lewą stronę otrzymanej nierówności do postaci iloczynowej, wykorzystując np. wzory skróconego mnożenia:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y)}{xy} = \frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}.$$

Z założenia mamy $x > 0$ i $y > 0$, stąd $xy > 0$ i $x + y > 0$, natomiast nierówność $(x - y)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla dowolnych x i y , zatem $\frac{(x+y)(x-y)^2}{xy} \geq 0$. Co kończy dowód.

Uwaga

Uczeń może lewą stronę nierówności $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$ przekształcić do postaci iloczynowej, grupując wyrazy:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{x^2(x-y) - y^2(x-y)}{xy} = \frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy

- zapisze lewą stronę nierówności $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$ w postaci

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y)}{xy}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze lewą stronę nierówności $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y \geq 0$ w postaci

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} - x - y = \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{xy} = \frac{x^2(x-y) - y^2(x-y)}{xy}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Mnożymy obie strony nierówności $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$ przez xy (z założenia mamy $x > 0$

i $y > 0$) i zapisujemy nierówność w postaci $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.

Stosujemy wzór skróconego mnożenia i zapisujemy nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ w postaci np. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)xy$.

Następnie sprowadzamy nierówność do postaci: $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$.

Z założenia mamy $x > 0$ i $y > 0$, stąd $x + y > 0$, natomiast nierówność $(x - y)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla dowolnych x i y , zatem $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$. Co kończy dowód.

Uwaga

Uczeń może przekształcić nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ do postaci $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$, następnie pogrupować wyrazy i zapisać lewą stronę nierówności w postaci $x^2(x - y) - y^2(x - y) \geq 0$.

Schemat oceniania II sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt
gdy

- zapisze nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ w postaci $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)xy$, albo
 - zapisze nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ w postaci $x^2(x - y) - y^2(x - y) \geq 0$,
- i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający podstawí konkretne wartości w miejsce x i y , to przyznajemy **0 punktów**.

III sposób rozwiązania

Dla dowolnych x i y , prawdziwa jest nierówność: $(x - y)^2 \geq 0$.

Z założenia mamy $x > 0$ i $y > 0$, stąd $x + y > 0$, zatem $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$.

Stosujemy wzór skróconego mnożenia i redukcję wyrazów i przekształcamy lewą stronę nierówności $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ do postaci: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$, a następnie do postaci $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$.

Dzielimy obie strony nierówności $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ przez xy (z założenia mamy $x > 0$ i $y > 0$, stąd $xy > 0$) i wnioskujemy, że $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy korzystając z założenia $x > 0$ i $y > 0$, doprowadzi nierówność $(x - y)^2 \geq 0$ do nierówności $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

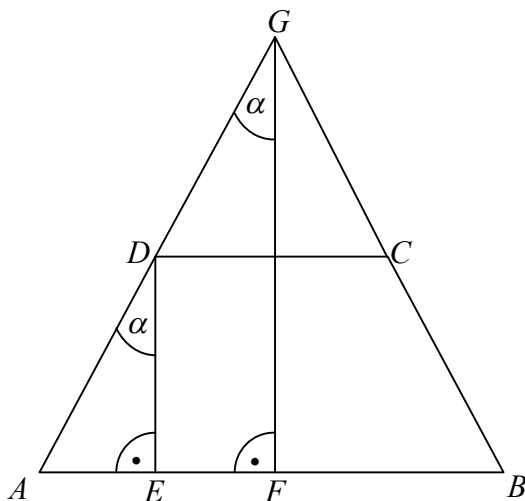
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Zdający otrzymuje **1 punkt**, jeśli uzasadniając daną nierówność nie zapisze, że $x + y > 0$ i $x \cdot y > 0$.

Zadanie 27. (2 pkt)

Dany jest trapez $ABCD$. Dłuższa podstawa AB ma długość m , pozostałe trzy boki trapezu są równej długości. Przedłużenia ramion trapezu AD i BC przecinają się w punkcie E pod kątem 2α . Oblicz obwód tego trapezu.

I sposób rozwiązania

Wprowadzamy oznaczenia $|AD| = |BC| = |CD| = x$ i $|AB| = m$.

Zauważamy, że trójkąty ADE i AGF są podobne, zatem $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle AGF| = \alpha$.

Różnica między długościami podstaw trapezu jest równa $|AB| - |CD| = m - x$. Stąd

$$|AE| = \frac{m - x}{2}.$$

Trójkąt ADE jest prostokątny, zatem $\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{\frac{m - x}{2}}{x}$. Stąd $x = \frac{m}{2 \sin \alpha + 1}$.

Wyznaczamy obwód trapezu $ABCD$:

$$O = |AB| + 3|AD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

Schemat oceniania I sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt
gdy

zauważy, że trójkąty ADE i AGF są podobne oraz zapisze równość $\sin \alpha = \frac{\frac{m - x}{2}}{x}$.

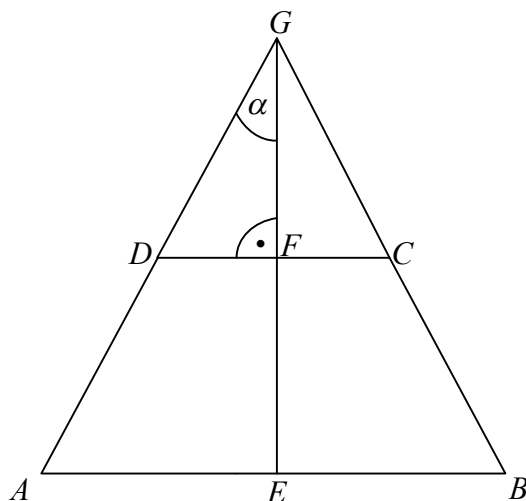
Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

II sposób rozwiązania



Zauważamy, że trójkąty ABG i DCG są podobne.

Wprowadzamy oznaczenia $|AD| = |BC| = |CD| = x$, $|DG| = |CG| = y$ i $|AB| = m$.

Trójkąty ABG i DCG są podobne, zatem $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|AG|}$. Stąd $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$.

Trójkąt DFG jest prostokątny, zatem $\sin \alpha = \frac{|DF|}{|DG|} = \frac{\frac{x}{2}}{y}$. Stąd $y = \frac{\frac{1}{2}x}{\sin \alpha} = \frac{x}{2 \sin \alpha}$.

Podstawiamy $y = \frac{x}{2 \sin \alpha}$ do równania $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ i otrzymujemy $x = \frac{m}{2 \sin \alpha + 1}$.

Wyznaczamy obwód trapezu $ABCD$:

$$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

Schemat oceniania II sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt
gdy

zauważy, że trójkąty ABG i DCG są podobne, stąd $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ oraz zauważy, że

$$\sin \alpha = \frac{|DF|}{|DG|} = \frac{\frac{x}{2}}{y}.$$

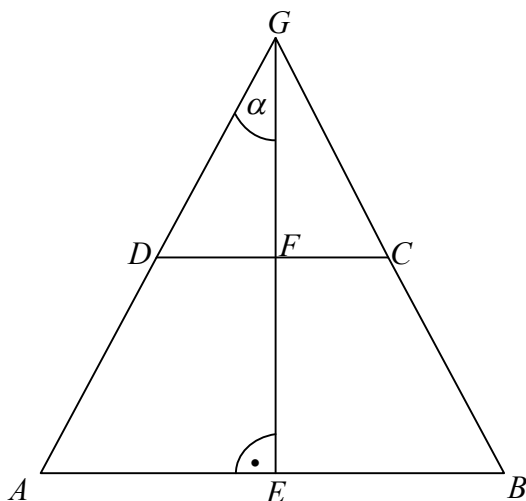
Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$.

Uwagi

1. Nie wymagamy uzasadnienia podobieństwa trójkątów.
2. Zdający może od razu zapisać proporcję bez stwierdzenia faktu podobieństwa trójkątów.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

III sposób rozwiązania



Zauważamy, że trójkąty ABG i DCG są podobne.

Wprowadzamy oznaczenia $|AD| = |BC| = |CD| = x$, $|DG| = |CG| = y$ i $|AB| = m$.

Trójkąty ABG i DCG są podobne, zatem $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|AG|}$. Stąd $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$.

Trójkąt AEG jest prostokątny, zatem $\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AG|} = \frac{\frac{m}{2}}{x+y}$. Stąd $y = \frac{\frac{m}{2} - x \sin \alpha}{\sin \alpha}$.

Podstawiamy $y = \frac{\frac{m}{2} - x \sin \alpha}{\sin \alpha}$ do równania $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ i otrzymujemy $x = \frac{m}{2 \sin \alpha + 1}$.

Wyznaczamy obwód trapezu $ABCD$:

$$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

Schemat oceniania III sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

Gdy zauważy, że trójkąty ABG i DCG są podobne, stąd $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ oraz zauważy, że

$$\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AG|} = \frac{\frac{m}{2}}{x+y}.$$

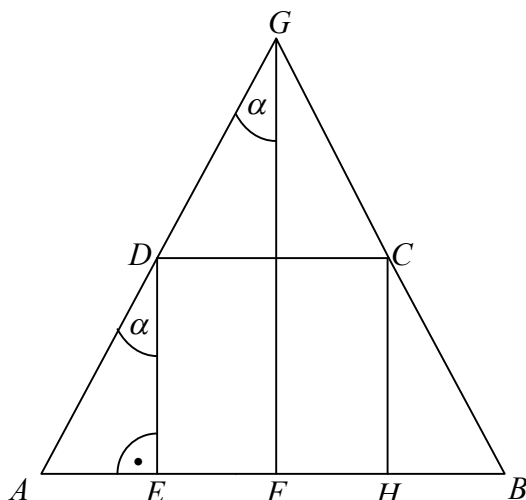
Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$.

Uwagi

1. Nie wymagamy uzasadnienia podobieństwa trójkątów.
2. Zdający może od razu zapisać proporcję bez stwierdzenia faktu podobieństwa trójkątów.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

IV sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia $|AD| = |BC| = |CD| = x$, $|DE| = h$ i $|AB| = m$.

Zauważamy, że trójkąty ADE i AGF są podobne, zatem $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle AGF| = \alpha$.

Trójkąt ADE jest prostokątny, zatem $\cos \alpha = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{h}{x}$ i $\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AD|}$. Stąd $|DE| = h = x \cos \alpha$ i $|AE| = x \sin \alpha$.

Zapisujemy pole trapezu $ABCD$ na dwa sposoby:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot |DE| \text{ i } P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |DE| + |DC| \cdot |DE| + \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |CH|.$$

Otrzymujemy równanie: $\frac{m+x}{2} \cdot x \cos \alpha = x \cdot x \cos \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \sin \alpha \cdot x \cos \alpha$.

Po przekształceniach otrzymujemy $x = \frac{m}{1 + 2 \sin \alpha}$.

Wyznaczamy obwód trapezu $ABCD$:

$$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3 \frac{m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m \sin \alpha + 4m}{2 \sin \alpha + 1} = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}.$$

Schemat oceniania IV sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy zapisze równanie $\frac{m+x}{2} \cdot x \cos \alpha = x \cdot x \cos \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \sin \alpha \cdot x \cos \alpha$.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O = \frac{2m(\sin \alpha + 2)}{2 \sin \alpha + 1}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

Zadanie 28. (2 pkt)

Przemek w czasie ferii zimowych podjął pracę w firmie „Ulotek-express”. Pierwszego dnia rozniósł 900 ulotek, każdego następnego dnia o 40 mniej niż poprzedniego. Za dostarczenie jednej ulotki firma płaci 5 groszy. Jaką kwotę zarobił Przemek w czasie 14 dni pracy?

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego $r = -40$, a następnie czternasty wyraz ciągu $a_{14} = 900 + 13 \cdot (-40) = 380$.

Obliczamy sumę czternastu wyrazów tego ciągu (czyli liczbę ulotek, jaką rozniósł Przemek) $S_{14} = 8960$.

Obliczamy jaką kwotę zarobił Przemek: $8960 \cdot 5 \text{ groszy} = 448 \text{ zł}$.

II sposób rozwiązania

Obliczamy kwotę, którą zarobił Przemek pierwszego dnia: $900 \cdot 5 \text{ groszy} = 45 \text{ zł}$.

Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego $r = -40 \cdot 0,05 = -2$, a następnie czternasty wyraz ciągu $a_{14} = 45 + 13 \cdot (-2) = 19$.

Obliczamy sumę czternastu wyrazów tego ciągu (czyli kwotę, jaką zarobił Przemek w czasie 14 dni pracy) $S_{14} = 448 \text{ zł}$.

III sposób rozwiązania

Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego $r = -40$ lub $r = -2$, a następnie bezpośrednio sumę czternastu wyrazów tego ciągu $S_{14} = 8960$ lub $S_{14} = 448$.

Zapisujemy odpowiedź: Przemek zarobił 448 zł.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- zauważy, że mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym i wyznaczy różnicę tego ciągu i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy w wyznaczeniu różnicy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy jaką kwotę zarobił Przemek.

Zdający otrzymuje 2 punkty

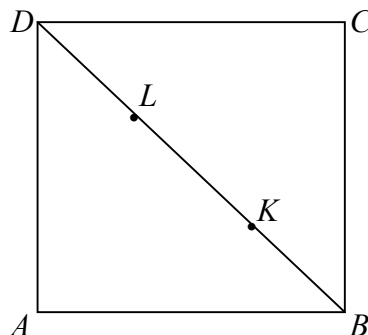
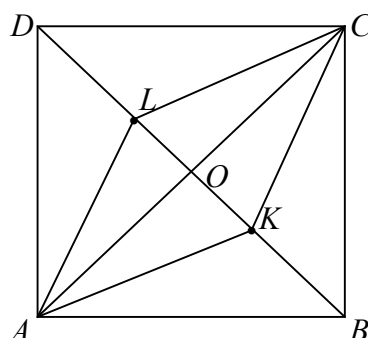
gdy obliczy kwotę jaką w czasie 14 dni pracy: 448 zł.

Uwagi

1. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu, ale zapisze np. $900 + 860 + 820 + \dots + 380$ i poprawnie obliczy zarobioną kwotę, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.
2. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu, ale zapisze np. $45 + 43 + 41 + 39 + \dots + 19$ i poprawnie obliczy zarobioną kwotę, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.
3. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu (np. tak jak w uwadze 1 lub 2) i popełni błąd rachunkowy, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
4. Jeśli zdający zapisze poprawną odpowiedź (bez uzasadnienia) to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (2 pkt)

Dany jest kwadrat $ABCD$. Na przekątnej BD obrano dwa różne punkty K i L , takie że $|BK| = |DL|$ (zobacz rysunek). Uzasadnij, że czworokąt $AKCL$ jest rombem.

**I sposób rozwiązania**

Przekątna BD to dwusieczna kąta prostego, stąd $|\sphericalangle ADL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle CBK| = |\sphericalangle ABK| = 45^\circ$.

Z założenia mamy $|DL| = |BK|$ oraz $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$.

Trójkąty ADL , CDL , CBK , ABK są przystające (cecha bkb), stąd $|AL| = |CL| = |CK| = |AK|$.

Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- zapisze, że trójkąty ADL , CDL , CBK , ABK są przystające,

albo

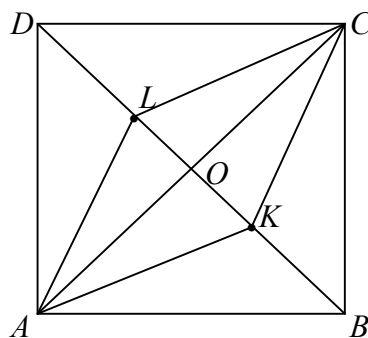
- zaznaczy na rysunku równość odpowiednich boków i kątów w czterech trójkątach ADL , CDL , CBK , ABK

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy uzasadni, że wszystkie boki czworokąta $AKCL$ są równe i zapisze, że czworokąt $AKCL$ jest rombem.

II sposób rozwiązania



Trójkąty AOL , AOK , COK , COL są prostokątne, bo przekątne kwadratu są prostopadłe.

Ponieważ $|DL| = |KB|$, $|OD| = |OB|$ i $|LO| = |OD| - |DL|$ oraz $|OK| = |OB| - |KB|$, zatem $|LO| = |OK|$. Wiemy, że $|AO| = |OC|$.

Trójkąty AOL , AOK , COK , COL są przystające (cecha bkb), stąd $|AL| = |CL| = |CK| = |AK|$.

Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- zapisze, że trójkąty AOL , AOK , COK , COL są przystające,

albo

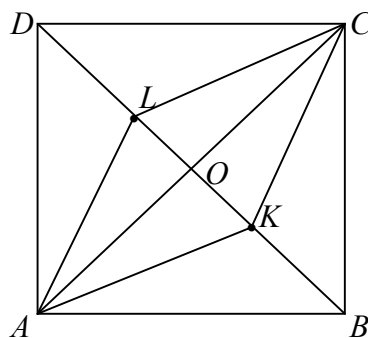
- zaznaczy na rysunku równość odpowiednich boków i kątów w czterech trójkątach ADL , CDL , CBK , ABK

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy uzasadni, że wszystkie boki czworokąta $AKCL$ są równe i zapisze, że czworokąt $AKCL$ jest rombem.

III sposób rozwiązania



Przekątne czworokąta $AKCL$ pokrywają się z przekątnymi kwadratu, zatem są prostopadłe. Punkt przecięcia przekątnych kwadratu O , dzieli przekątne AC i BD na połowy. Stąd $|OD| = |OB|$ oraz $|AO| = |OC|$.

Z założenia mamy $|DL| = |KB|$.

Dodatkowo $|LO| = |OD| - |DL|$ oraz $|OK| = |OB| - |KB|$, zatem $|LO| = |OK|$.

W czworokącie $AKCL$ przekątne są prostopadłe i punkt ich przecięcia O dzieli je na połowy. Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- zauważy, że przekątne czworokąta $AKCL$ są prostopadłe i zapisze, że $|AO| = |OC|$,

albo

- zauważy, że przekątne czworokąta $AKCL$ są prostopadłe i zaznaczy na rysunku, że $|AO| = |OC|$,

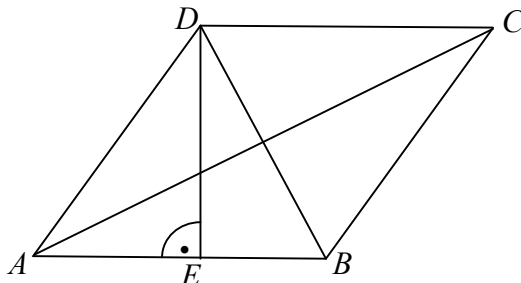
i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy uzasadni, że $|LO| = |OK|$ oraz zapisze, że w czworokącie $AKCL$ przekątne są prostopadłe i ich punkt przecięcia O dzieli je na połowy. Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

Zadanie 30. (2 pkt)

Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 16 i polu powierzchni równym $128\sqrt{3}$. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego rombu.

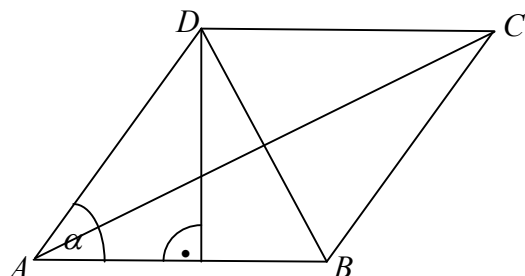
I sposób rozwiązania

Wprowadzamy oznaczenia $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a = 16$, $|DE| = h$.

Obliczamy wysokość rombu: $h = \frac{128\sqrt{3}}{a} = \frac{128\sqrt{3}}{16} = 8\sqrt{3}$.

Trójkąt AED jest prostokątny, więc $|AE|^2 + h^2 = a^2$. Stąd $|AE| = 8$. Zatem $|AE| = |EB|$. $|AB| = |AD|$ i $|AE| = |EB|$ stąd trójkąty AED i EBD są przystające, zatem trójkąt ABD jest równoboczny.

Dłuższa przekątna rombu jest równa $|AC| = 2h = 16\sqrt{3}$.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy pole rombu za pomocą wzoru $P_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \alpha$, stąd $128\sqrt{3} = 16^2 \cdot \sin \alpha$. Zatem

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i wtedy $\alpha = 60^\circ$.

$|AB| = |AD|$ i $\alpha = 60^\circ$, zatem trójkąt ABD jest równoboczny.

Dłuższa przekątna jest równa $|AC| = 2h = 16\sqrt{3}$.

Uwaga

Uczeń może zauważyć, że $P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AC|$. Zatem $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot |AC| = 128\sqrt{3}$, stąd $|AC| = 16\sqrt{3}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- obliczy długość wysokości rombu $h = 8\sqrt{3}$,

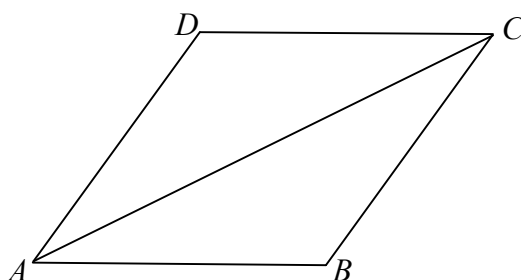
albo

- obliczy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i zauważy że, trójkąt ABD jest równoboczny.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy obliczy długość dłuższej przekątnej rombu $|AC| = 16\sqrt{3}$.

III sposób rozwiązania



Zapisujemy pole rombu korzystając ze wzoru $P_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \alpha$.

Otrzymujemy równanie $16^2 \cdot \sin \alpha = 128\sqrt{3}$, stąd $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem $\alpha = 60^\circ$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów i zapisujemy

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 120^\circ = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos 120^\circ, \text{ stąd } |AC| = 16\sqrt{3}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy obliczy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i zapisze $|AC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos 120^\circ$.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy obliczy długość dłuższej przekątnej rombu $|AC| = 16\sqrt{3}$.

Zadanie 31. (4 pkt)

Julia i Dominika mają skarbonki. W skarbonce Julii znajduje się 1 banknot 50 zł, dwa banknoty 20 zł i 3 banknoty 10 zł, natomiast w skarbonce Dominiki znajdują się 2 banknoty 50 zł, 1 banknot 20 zł i 5 banknotów 10 zł. Każda z dziewcząt losuje ze swojej skarbonki jeden banknot. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość wylosowanych banknotów przekroczy 38 zł? Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

I sposób rozwiązania (metoda klasyczna)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b) takie, że $a \in \{50, 20, 20, 10, 10, 10\}$, $b \in \{50, 50, 20, 10, 10, 10, 10, 10\}$.

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającym na tym, że wartość wylosowanych banknotów przekroczy 38 zł, np. wypisując je i zliczając:

Wypisujemy wszystkie możliwe pary wyboru banknotów:

$A \in \{(50, 50), (50, 20), (50, 20), (50, 10), (50, 10), (50, 10), (50, 50), (50, 20), (50, 20), (50, 10), (50, 10), (50, 10), (20, 50), (20, 20), (20, 20), (10, 50), (10, 50), (10, 50), (10, 50), (10, 50)\}$, czyli $|A| = 20$.

$$\text{Stąd } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}.$$

Uwaga

Uczeń może:

- obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A zapisując możliwe układy banknotów: 50 zł i 50 zł lub 50 zł i 20 zł lub 50 zł i 10 zł lub 20 zł i 50 zł lub 20 zł i 20 zł lub 10 zł i 50 zł i stąd $|A| = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 20$,

albo

- obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu do zdarzenia A (wartość wylosowanych banknotów nie przekroczy 38 zł). Wystarczy zauważyć, że niemożliwe są układy: 20 zł i 10 zł lub 10 zł i 10 zł lub 10 zł i 20 zł, więc $|A'| = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 = 28$.

$$\text{Stąd } P(A') = \frac{28}{48}. \text{ Zatem } P(A) = 1 - \frac{28}{48} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

$$(\text{lub } |A| = |\Omega| - |A'|, \text{ stąd } |A| = 48 - 28 = 20. \text{ Zatem } P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}).$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 punkt

- uczeń zapisze, że $|\Omega| = 6 \cdot 8$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń pokaże metodę zliczania zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A lub A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 punkty

- uczeń zapisze, że $|\Omega| = 48$ i pokaże metodę zliczania zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu A' , np.: $|A| = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2$ lub $|A'| = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń zapisze, że $|\Omega| = 48$ i wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A lub A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 punkty

- uczeń obliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A| = 20$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- uczeń obliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A'| = 28$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 punkty

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zapisanie wyniku w postaci ułamka nieskracalnego $P(A) = \frac{5}{12}$.

II sposób rozwiązania (metoda tabeli)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b) takie, że $a \in \{50, 20, 20, 10, 10, 10\}$, $b \in \{50, 50, 20, 10, 10, 10, 10\}$.

Tworzymy tabelę ilustrującą sytuacją opisaną w zadaniu, np.:

	50zł	20 zł	20 zł	10 zł	10 zł	10 zł
50 zł	x	x	x	x	x	x
50 zł	x	x	x	x	x	x
20 zł	x	x	x			
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$.

Zliczamy oznaczone krzyżykami zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A : $|A| = 20$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$.

Uwaga

Uczeń może oznaczyć w tabeli zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu przeciwnemu do zdarzenia A .

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 punkt

Zdający sporządzi tabelkę przedstawiającą sytuację w zadaniu, np.:

	50zł	20 zł	20 zł	10 zł	10 zł	10 zł
50 zł						
50 zł						
20 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 punkty

- uczeń obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 48$ i zaznaczy w tabeli zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeniu A i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 48$ i zaznaczy w tabeli zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeniu A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 punkty

- uczeń zliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A| = 20$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

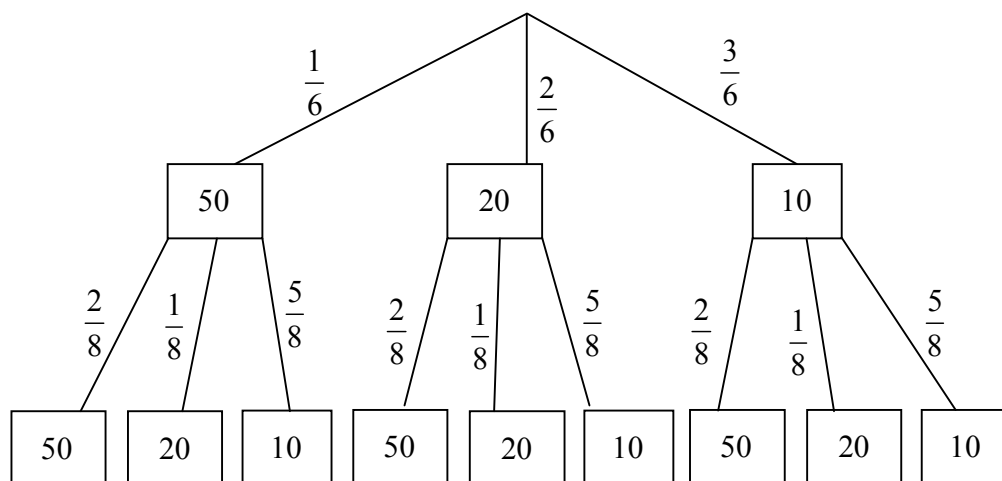
- uczeń zliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A'| = 28$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie pełne 4 punkty

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zapisanie wyniku w postaci ułamka nieskracalnego $P(A) = \frac{5}{12}$.

III sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo uwzględniając tylko istotne gałęzie i zapisujemy na nich prawdopodobieństwo.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2+1+5+4+2+6}{6 \cdot 8} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 punkty

Uczeń narysuje drzewo uwzględniającego tylko istotne gałęzie i zapisze na nich prawdopodobieństwo.

Uwaga

Jeżeli zdający narysuje drzewo uwzględniające tylko istotne gałęzie i nie zapisze na nich prawdopodobieństwa, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 punkty

Uczeń zapisze $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{8}$ i nie poda wyniku w postaci ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie pełne 4 punkty

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{12}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia metodą drzewa i otrzymany wynik podzieli przez 48, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający opuści w rozwiązaniu niektóre gałęzie i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy prawdopodobieństwo i błędnie skróci ułamek, np.:

$$P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{6}, \text{ to za takie rozwiązanie przyznajemy } \mathbf{3 \text{ punkty}}.$$

Zadanie 32. (5 pkt)

Punkty o współrzędnych $A = (-2, -8)$, $B = (2, 4)$, $C = (-2, 2)$ są wierzchołkami trapezu. Ramię trapezu AD jest prostopadłe do podstaw AB i CD . Oblicz współrzędne punktu D oraz pole powierzchni tego trapezu.

I sposób rozwiązania

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB lub wyznaczamy równanie prostej AB :

$$a = \frac{4+8}{2+2} = \frac{12}{4} = 3, \text{ stąd } y = 3(x+2) - 8. \text{ Zatem } y = 3x - 2.$$

Wyznaczamy równanie prostej równoległej do prostej AB , przechodzącej przez punkt C :

$$y = 3(x+2) + 2, \text{ stąd } y = 3x + 8.$$

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt A :

Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy 3, stąd współczynnik kierunkowy prostej

$$AD \text{ jest równy } -\frac{1}{3}. \text{ Zatem prosta } AD \text{ ma równanie } y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3}.$$

$$\text{Obliczamy współrzędne punktu } D \text{ rozwiązując układ równań } \begin{cases} y = 3x + 8 \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3} \end{cases}$$

Punkt D ma współrzędne $D = (-5, -7)$.

Obliczamy długości podstaw i wysokość trapezu:

$$|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}, \quad |CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ i } |AD| = \sqrt{10}.$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} = 35.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- Wyznaczenie równania prostej AB : $y = 3x - 2$.
- albo
- Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a = 3$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej AB : $y = 3x + 8$ i równania prostej prostopadłej do prostej AB przechodzącej przez punkt A : $y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu $D = (-5, -7)$ oraz obliczenie jednej z wielkości:

- długości podstawy trapezu $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$,
- albo
- długości podstawy trapezu $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$,
- albo
- wysokości trapezu $|AD| = \sqrt{10}$.

Rozwiązanie prawie całkowite 4 pkt

Obliczenie pozostałych dwóch wielkości niezbędnych do obliczenia pola trapezu:

- długości podstawy trapezu $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD| = \sqrt{10}$.

albo

- długości podstawy trapezu $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD| = \sqrt{10}$.

albo

- długości podstaw trapezu $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ i $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie pola trapezu: $P = 35$.

Uwaga

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu D lub przy obliczaniu długości podstawy AB lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty**.

II sposób rozwiązania

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB lub wyznaczamy równanie prostej AB :

$$a = \frac{4+8}{2+2} = \frac{12}{4} = 3, \text{ stąd } y = 3(x+2) - 8. \text{ Zatem } y = 3x - 2.$$

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej AB , przechodzącej przez punkt C :

$$y = -\frac{1}{3}(x+2) + 2, \text{ stąd } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Prosta prostopadła do AB i przechodząca przez punkt C przecina prostą AB w punkcie E .

$$\text{Obliczamy współrzędne punktu } E \text{ rozwiązując układ równań } \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Punkt E ma współrzędne punktu $E = (1, 1)$.

Obliczamy wysokość trapezu CE : $|CE| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Obliczamy długości podstaw trapezu:

$$|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ i } |CD| = |AE| \text{ lub } |CD| = |AB| - |EB| \text{ (bo trapez jest prostokątny).}$$

$$\text{Zatem } |CD| = |AE| = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ lub } |CD| = 4\sqrt{10} - \sqrt{10} = 3\sqrt{10}.$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} = 35.$$

Obliczamy współrzędne punktu D (porównując wektory $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AD}$). Stąd $[-3, 1] = [x_D + 2, y_D + 8]$. Zatem $x_D + 2 = -3$ i $y_D + 8 = 1$, czyli $D = (-5, -7)$.

Uwaga

Współrzędne punktu D możemy obliczyć jak poniżej:

Wyznaczamy równanie prostej równoległej do prostej CE i przechodzącej przez punkt A :

$$y = -\frac{1}{3}(x+2) - 8. \text{ Stąd współrzędne punktu } D = \left(x_D, -\frac{1}{3}x_D - \frac{26}{3}\right).$$

$$|AD| = |CE| \text{ więc } \sqrt{(x_D+2)^2 + \left(-\frac{1}{3}x_D - \frac{26}{3}\right)^2} = \sqrt{10}, \text{ stąd } (x_D+2)^2 + \frac{1}{9}(x_D+2)^2 = 10$$

Otrzymujemy równanie $(x_D+2)^2 = 9$, które rozwiązaniem są $x_D = -5$ i $x_D = 1$.

Obliczamy drugą współrzędną punktu D : $y_D = -7$ i $y_D = -9$.

Druga para nie spełnia warunków zadania, więc punkt D ma współrzędne: $D = (-5, -7)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- Wyznaczenie równania prostej AB : $y = 3x - 2$.

albo

- Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a = 3$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wyznaczenie równania prostej prostopadłej do prostej AB , przechodzącej przez punkt C :

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{26}{3} \text{ i wyznaczenie współrzędnych punktu } E = (1, 1).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu $D = (-5, -7)$ oraz obliczenie jednej z wielkości:

- długości podstawy trapezu $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$,

albo

- długości podstawy trapezu $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$,

albo

- wysokości trapezu $|AD| = \sqrt{10}$.

Rozwiązanie prawie całkowite 4 pkt

Obliczenie pozostałych dwóch wielkości niezbędnych do obliczenia pola trapezu:

- długości podstawy trapezu $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD| = \sqrt{10}$.

albo

- długości podstawy trapezu $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD| = \sqrt{10}$.

albo

- długości podstaw trapezu $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ i $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie pola trapezu: $P = 35$.

Uwaga

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu D lub przy obliczaniu długości podstawy AB lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty**.

III sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB :

$$a = \frac{4+8}{2+2} = \frac{12}{4} = 3, \text{ stąd } y = 3(x+2) - 8. \text{ Zatem } 3x - y - 2 = 0.$$

Obliczamy wysokość trapezu (wyznaczamy odległość punktu C od prostej AB):

$$h = \frac{|-6 - 2 - 2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Wektor prostopadły do prostej AB ma współrzędne: $\vec{u} = [3t, -t]$, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Zatem } h = |\vec{u}| = \sqrt{9t^2 + t^2} = |t| \cdot \sqrt{10} \text{ i } |t| \cdot \sqrt{10} = \sqrt{10}, \text{ stąd } t = 1 \text{ lub } t = -1.$$

$$\text{Prosta } AD \text{ na równanie: } \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -8 - t \end{cases}.$$

Otrzymujemy: $x_D = -5$ i $y_D = -7$ lub $x_D = 1$ i $y_D = -9$.

Druga para nie spełnia warunków zadania, więc punkt D ma współrzędne: $D = (-5, -7)$.

$$\text{Obliczamy długości podstaw trapezu: } |AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ i } |CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} = 35.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wyznaczenie równania prostej AB : $3x - y - 2 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie wysokości trapezu: $h = \sqrt{10}$ oraz zapisanie współrzędnych wektora prostopadłego do prostej AB w zależności od parametru t : np. $\vec{u} = [3t, -t]$, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz obliczenie wartości t , dla których długość wektora $\vec{u}$ jest równa długości wysokości trapezu.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu $D = (-5, -7)$ oraz obliczenie długości jednej z podstaw trapezu: $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ albo $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

Rozwiązanie prawie całkowite 4 pkt

Obliczenie długości drugiej podstawy trapezu: $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ albo $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

Rozwiązanie pełne **5 pkt**

Obliczenie pola trapezu: $P = 35$.

Uwaga

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu D lub przy obliczaniu długości podstawy AB lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty**.

Zadanie 33. (5 pkt)

Szkoła zakupiła na raty serwer za kwotę 5400 zł. Będzie go spłacała w równych miesięcznych ratach. Gdyby okres spłaty skrócić o pół roku, wówczas kwota raty wzrosłaby o 75 zł. Jaka była miesięczna wysokość raty i przez jaki okres szkoła spłacała swoje zobowiązania finansowe?

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza liczbę miesięcy spłacania zobowiązania i niech y oznacza wysokość miesięcznej raty.

Zapisujemy układ:
$$\begin{cases} x \cdot y = 5400 \\ (x-6) \cdot (y+75) = 5400 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = \frac{5400}{x}$ albo $x = \frac{5400}{y}$.

Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$(x-6) \left(\frac{5400}{x} + 75 \right) = 5400 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{5400}{y} - 6 \right) (y+75) = 5400.$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.:

$$75x^2 - 450x - 32400 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 6x - 432 = 0$$

albo

$$-6y^2 - 450y + 405000 = 0 \quad \text{lub} \quad -y^2 - 75y + 67500 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$75x^2 - 450x - 32400 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$x_1 = \frac{450-3150}{150} < 0 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{450+3150}{150} = 24$$

$$x^2 - 6x - 432 = 0$$

$$\Delta = 36 + 1728 = 1764$$

lub $\sqrt{\Delta} = 42$

$$x_1 = \frac{6-42}{2} < 0 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{6+42}{2} = 24$$

albo

$$-6y^2 - 450y + 405000 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$y_1 = \frac{450-3150}{-12} = 225 \quad \text{lub} \quad y_2 = \frac{450+3150}{-12} < 0$$

$$-y^2 - 75y + 67500 = 0$$

$$\Delta = 5625 + 270000 = 275625$$

lub $\sqrt{\Delta} = 525$

$$y_1 = \frac{75-525}{-2} = 225 \quad \text{lub} \quad y_2 = \frac{75+525}{-2} < 0$$

Odrzucamy rozwiązanie nie spełniające warunków zadania i zapisujemy, że $x = 24$ i $y = 225$.

Odp.: Wysokość miesięcznej raty wynosiła 225 zł, a szkoła spłacała swoje zobowiązanie przez 24 miesiące.

II sposób rozwiązania

Niech a oznacza liczbę lat spłacania zobowiązania i niech b oznacza wysokość rocznej spłaty.

$$\text{Zapisujemy układ: } \begin{cases} a \cdot b = 5400 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (b + 900) = 5400 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $b = \frac{5400}{a}$ albo $a = \frac{5400}{b}$.

Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{5400}{a} + 900\right) = 5400 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{5400}{b} - \frac{1}{2}\right) (b + 900) = 5400.$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.:

$$900a^2 - 450a - 2700 = 0 \quad \text{lub} \quad 2a^2 - a - 6 = 0$$

albo

$$-\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0 \quad \text{lub} \quad -b^2 - 900b + 9720000 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$900a^2 - 450a - 2700 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$a_1 = \frac{450 - 3150}{180} < 0 \quad \text{lub} \quad a_2 = \frac{450 + 3150}{180} = 2$$

$$2a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$\text{lub} \quad \sqrt{\Delta} = 7$$

$$a_1 = \frac{1 - 7}{4} < 0 \quad \text{lub} \quad a_2 = \frac{1 + 7}{4} = 2$$

albo

$$-\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0$$

$$\Delta = 202500 + 972000 = 9922500$$

$$\sqrt{\Delta} = 3150$$

$$b_1 = \frac{450 - 3150}{-1} = 2700 \quad \text{lub} \quad b_2 = \frac{450 + 3150}{-1} < 0$$

$$-b^2 - 900b + 9720000 = 0$$

$$\Delta = 810000 + 38880000 = 39690000$$

$$\text{lub} \quad \sqrt{\Delta} = 6300$$

$$b_1 = \frac{900 - 6300}{-2} = 2700 \quad \text{lub} \quad b_2 = \frac{900 + 6300}{-2} < 0$$

Odrzucamy rozwiązanie nie spełniające warunków zadania i zapisujemy, że $a = 2$ i $b = 2700$.

Odp.: Wysokość miesięcznej raty wynosiła 225 zł, a szkoła spłacała swoje zobowiązanie przez 2 lata.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: x – liczba miesięcy spłacania zobowiązania, y – wysokość miesięcznej raty i zapisanie związku między tymi wielkościami $x \cdot y = 5400$.

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: x – liczba miesięcy spłacania zobowiązania, y – wysokość miesięcznej raty i zapisanie związku między tymi wielkościami w przypadku skrócenia okresu spłaty np.: $(x-6) \cdot (y+75) = 5400$.

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: a – liczba lat spłacania zobowiązania, b – wysokość rocznej spłaty i zapisanie związku między tymi wielkościami $a \cdot b = 5400$.

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: a – liczba lat spłacania zobowiązania, b – wysokość rocznej spłaty i zapisanie związku między tymi wielkościami w przypadku skrócenia okresu spłaty np.: $\left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (b + 900) = 5400$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} x \cdot y = 5400 \\ (x-6) \cdot (y+75) = 5400 \end{cases}$$

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi a i b :

$$\begin{cases} a \cdot b = 5400 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (b + 900) = 5400 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y albo a lub b np.:

- $(x-6) \left(\frac{5400}{x} + 75 \right) = 5400$ lub $75x^2 - 450x - 32400 = 0$ lub $x^2 - 6x - 432 = 0$

albo

$$\bullet \left(\frac{5400}{y} - 6 \right) (y + 75) = 5400 \quad \text{lub} \quad -6y^2 - 450y + 405000 = 0 \quad \text{lub} \\ -y^2 - 75y + 67500 = 0$$

albo

$$\bullet \left(a - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{5400}{a} + 900 \right) = 5400 \quad \text{lub} \quad 900a^2 - 450a - 2700 = 0 \quad \text{lub} \quad 2a^2 - a - 6 = 0$$

albo

$$\bullet \left(\frac{5400}{b} - \frac{1}{2} \right) (b + 900) = 5400 \quad \text{lub} \quad -\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0 \quad \text{lub} \\ -b^2 - 900b + 9720000 = 0$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą x i nie obliczenie wysokości miesięcznej raty,
albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą y i nie obliczenie liczby miesięcy spłacania zobowiązania,
albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą a i nie obliczenie wysokości rocznej spłaty,
albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą b i nie obliczenie liczby lat spłacania zobowiązania,
albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą x lub y albo a lub b i konsekwentne rozwiązanie zadania do końca.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie wysokości miesięcznej raty (225 zł) i podanie okresu spłaty (24 miesiące lub 2 lata).

Uwagi

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda odpowiedź bez uzasadnienia, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.