

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych  
oraz  
Schemat oceniania

Poziom Podstawowy

### Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

| Nr zadania | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Odpowiedź  | A | C | A | A | D | B | A | A | C | A  | B  | D  | D  | C  | D  | C  | C  | C  | C  | B  | C  | A  | C  |

### Schemat oceniania zadań otwartych

#### Zadanie 24. (2 punkty)

Rozwiąż nierówność  $x^2 - 3x + 2 < 0$ .

#### I sposób rozwiązania

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 1 \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 3 \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = 2 \quad \text{i stąd} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci  $(x-1)(x-2) < 0$ . Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
  - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,
  - korzystając z postaci kanonicznej  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$
  - podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi

albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

Podajemy rozwiązanie nierówności:  $1 < x < 2$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

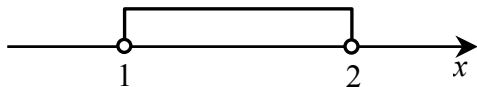
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $(1, 2)$  lub  $x \in (1, 2)$  lub  $1 < x < 2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x > 1, \quad x < 2$

albo

- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



## **II sposób rozwiązania**

Zapisujemy nierówność w postaci

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0, \text{ a następnie } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}, \text{ a stąd } \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}, \text{ więc } 1 < x < 2.$$

## **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy doprowadzi nierówność do postaci  $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

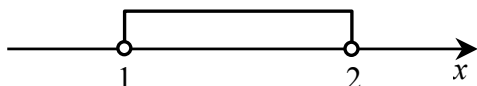
- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $(1, 2)$  lub  $x \in (1, 2)$  lub  $1 < x < 2$

albo

- sporządzić ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisać zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x > 1$ ,  $x < 2$

albo

- podać zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



## **Uwagi**

- Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x = 1$ ,  $x = 2$  i zapisze np.:  $x \in (-1, 2)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.

- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego

błędu rozwiąże nierówność, np. zapisze  $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-2}$ ,  $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-2}$ ,

$$x \in \left( \frac{-3 + \sqrt{17}}{-2}, \frac{-3 - \sqrt{17}}{-2} \right).$$

- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełnił jeden błąd przy przepisywaniu nierówności (pisząc np.  $x^2 + 3x + 2 < 0$ ,  $x^2 - 3x + 2 > 0$ ), o ile trójmian z lewej strony nierówności ma dwa różne pierwiastki i zdający rozwiąże konsekwentnie nierówność do końca.

**Zadanie 25. (2 punkty)**

Udowodnij, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 16, czyli  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16$ , jest podzielny przez  $2^{15}$ .

**I sposób rozwiązania**

Wystarczy obliczyć liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $16!$ .

Co druga liczba całkowita jest podzielna przez 2, więc mamy 8 dwójek.

Co czwarta liczba całkowita jest podzielna przez 4, więc mamy następne 4 dwójki.

Co ósma liczba całkowita jest podzielna przez 8, więc mamy następne 2 dwójki.

W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $16$  jest jeszcze 1 dwójka.

Łącznie w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $16!$  mamy  $8 + 4 + 2 + 1 = 15$  dwójek, czyli liczba ta jest podzielna przez  $2^{15}$ .

**II sposób rozwiązania**

Liczbę  $16!$  możemy zapisać w postaci:

$$2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (3 \cdot 2^2) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze  $16!$  w postaci  $2 \cdot 3 \cdot (2^2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot 15 \cdot (2^4)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy (np. źle zliczy liczbę czynników 2).

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 26. (2 punkty)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Oblicz  $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

**I sposób rozwiązania**

Najpierw obliczamy  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ .

Stąd  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , bo  $\alpha$  jest kątem ostrym.

Zatem  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}}$  i stąd  $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 3 + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{47}{15}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy obliczy  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

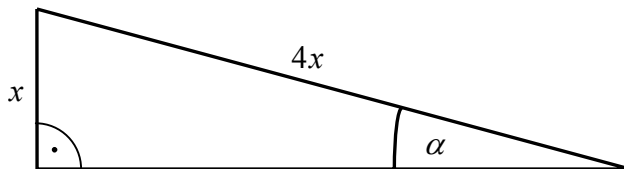
**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$  i zapisze wynik w postaci:  $3 + 2 \cdot \frac{1}{15}$ ,  $3 \frac{2}{15}$  lub  $\frac{47}{15}$ .

## **II sposób rozwiązania**

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy przyprostokątną  $x$  i przeciwprostokątną  $4x$  oraz zaznaczamy kąt ostry  $\alpha$  tak, aby  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ .

Uwaga: Zdający może oznaczyć długości odpowiednich boków liczbami 1 oraz 4.



Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość drugiej przyprostokątnej:  $x\sqrt{15}$ .

Obliczamy wartości funkcji  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$ . Stąd  $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{47}{15}$ .

## **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy poprawnie wyznaczy długość drugiej przyprostokątnej:  $x\sqrt{15}$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$  i zapisze wynik w postaci:  $3 + 2 \cdot \frac{1}{15}$ ,  $3 \frac{2}{15}$  lub  $\frac{47}{15}$ .

### **Uwaga:**

Akceptujemy sytuację, w której zdający odczytuje przybliżoną wartość  $\operatorname{tg} \alpha$  (na podstawie wartości  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  zdający może przyjąć  $\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{tg} 14^\circ \approx 0,2493$  albo  $\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{tg} 15^\circ \approx 0,2679$ , może również przyjąć przybliżenie z mniejszą dokładnością, ale nie mniejszą niż do jednego miejsca po przecinku) i na tej podstawie obliczyć wartość wyrażenia  $3 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$  stosując poprawnie regułę zaokrąglania.

**Zadanie 27. (2 punkty)**

Liczby  $2x+1$ ,  $6$ ,  $16x+2$  są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz  $x$ .

**I sposób rozwiązania**

Z własności ciągu arytmetycznego wynika, że drugi wyraz ciągu jest średnią arytmetyczną wyrazu pierwszego i wyrazu trzeciego. A zatem  $\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2} = 6$ , stąd  $x = \frac{1}{2}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze równanie wynikające z własności lub z definicji ciągu arytmetycznego np.:

$$\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2} = 6 \quad \text{lub} \quad 6 - (2x+1) = (16x+2) - 6.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy  $x = \frac{1}{2}$ .

**II sposób rozwiązania**

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 2x+1+2r=16x+2 \end{cases}$$

Stąd  $x = \frac{1}{2}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze układ równań, np.:

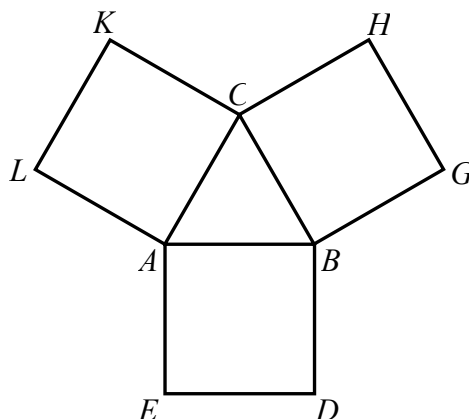
$$\begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 2x+1+2r=16x+2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 6+r=16x+2 \end{cases}.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

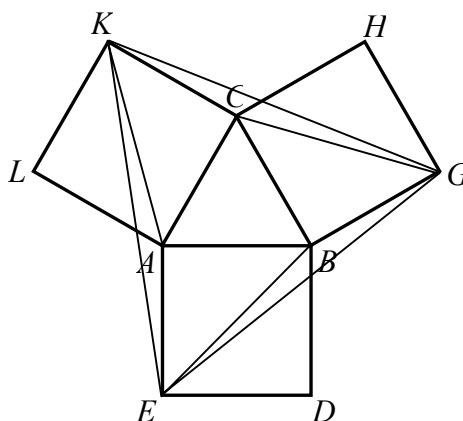
gdy obliczy  $x = \frac{1}{2}$ .

**Zadanie 28. (2 punkty)**

Na bokach trójkąta równobocznego  $ABC$  (na zewnątrz tego trójkąta) zbudowano kwadraty  $ABDE$ ,  $BGHC$  i  $ACKL$ . Udowodnij, że trójkąt  $KGE$  jest równoboczny.



**Rozwiązanie:**



Rysujemy odcinki  $KG$ ,  $CG$ ,  $GE$ ,  $BE$ ,  $KE$  i  $KA$ .

- Odcinki  $KC$ ,  $GB$  i  $AE$  są bokami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta równobocznego, więc  $|KC| = |GB| = |AE|$ .
- Odcinki  $CG$ ,  $BE$  i  $AK$  są przekątnymi tych kwadratów, więc  $|CG| = |BE| = |AK|$ .
- $|\sphericalangle GCK| = 360^\circ - (|\sphericalangle ACK| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCG|) = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 165^\circ$ .  
Analogicznie dowodzimy, że  $|\sphericalangle GBE| = |\sphericalangle EAK| = 165^\circ$ .
- Korzystając z cechy (*bok, kąt, bok*) przystawiania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty  $KCG$ ,  $GBE$  i  $AEK$  są przystające, więc  $|KG| = |GE| = |EK|$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze, że trójkąty  $KCG$ ,  $GBE$  i  $AEK$  są przystające i wyciągnie wniosek, że  $|KG| = |GE| = |EK|$ , lecz nie poda pełnego uzasadnienia równości odpowiednich kątów lub boków.

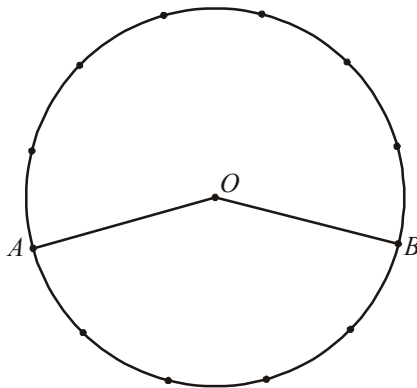
**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 29. (2 punkty)**

Punkty  $A$  i  $B$  leżą na okręgu o środku  $O$  i dzielą ten okrąg na dwa łuki, których stosunek długości jest równy 7:5. Jaka jest miara kąta środkowego opartego na krótszym łuku?

**Rozwiązanie**



Krótszy łuk to  $\frac{5}{12}$  okręgu, zatem kąt środkowy oparty na tym łuku to  $\frac{5}{12}$  kąta pełnego, tj.

$$\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ.$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy:

- zapisze, że krótszy łuk  $AB$  to  $\frac{5}{12}$  okręgu

lub

- zapisze układ równań, np.:  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$  i  $\alpha + \beta = 360^\circ$

lub

- zapisze, że dwa kolejne punkty zaznaczone na tym okręgu wraz z punktem  $O$  wyznaczają kąt środkowy o mierze  $30^\circ$

lub

- zapisze, że kąt środkowy oparty na dłuższym z łuków  $AB$  ma miarę  $210^\circ$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy miarę kąta środkowego opartego na krótszym z łuków  $AB$ :  $|\sphericalangle AOB| = 150^\circ$ .

**Zadanie 30. (2 punkty)**

Dane są dwa pudełka: czerwone i niebieskie. W każdym z tych pudełek znajduje się 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy niż numer kuli wylosowanej z niebieskiego pudełka.

**I sposób rozwiązania** (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary liczb  $(a, b)$ , gdzie  $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$ . Jest to model klasyczny.

$$|\Omega| = 10 \cdot 10$$

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu  $A$  są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim.

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 1, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 2 do 10. (Mamy więc 9 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 2, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 3 do 10. (Mamy więc 8 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 3, to na drugim może być każda z liczb od 4 do 10. (Mamy więc 7 możliwości). itd.

$$\text{Zatem } |A| = 9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45.$$

$$\text{Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia } A: \quad P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}.$$

**II sposób rozwiązania** (metoda tabeli)

Wszystkie zdarzenia elementarne możemy wypisać w postaci kwadratowej tablicy.

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |         |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| (1,1)  | (1,2)  | (1,3)  | (1,4)  | (1,5)  | (1,6)  | (1,7)  | (1,8)  | (1,9)  | (1,10)  |
| (2,1)  | (2,2)  | (2,3)  | (2,4)  | (2,5)  | (2,6)  | (2,7)  | (2,8)  | (2,9)  | (2,10)  |
| (3,1)  | (3,2)  | (3,3)  | (3,4)  | (3,5)  | (3,6)  | (3,7)  | (3,8)  | (3,9)  | (3,10)  |
| (4,1)  | (4,2)  | (4,3)  | (4,4)  | (4,5)  | (4,6)  | (4,7)  | (4,8)  | (4,9)  | (4,10)  |
| (5,1)  | (5,2)  | (5,3)  | (5,4)  | (5,5)  | (5,6)  | (5,7)  | (5,8)  | (5,9)  | (5,10)  |
| (6,1)  | (6,2)  | (6,3)  | (6,4)  | (6,5)  | (6,6)  | (6,7)  | (6,8)  | (6,9)  | (6,10)  |
| (7,1)  | (7,2)  | (7,3)  | (7,4)  | (7,5)  | (7,6)  | (7,7)  | (7,8)  | (7,9)  | (7,10)  |
| (8,1)  | (8,2)  | (8,3)  | (8,4)  | (8,5)  | (8,6)  | (8,7)  | (8,8)  | (8,9)  | (8,10)  |
| (9,1)  | (9,2)  | (9,3)  | (9,4)  | (9,5)  | (9,6)  | (9,7)  | (9,8)  | (9,9)  | (9,10)  |
| (10,1) | (10,2) | (10,3) | (10,4) | (10,5) | (10,6) | (10,7) | (10,8) | (10,9) | (10,10) |

albo

|    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1  |   | X | X | X | X | X | X | X | X | X  |
| 2  |   |   | X | X | X | X | X | X | X | X  |
| 3  |   |   |   | X | X | X | X | X | X | X  |
| 4  |   |   |   |   | X | X | X | X | X | X  |
| 5  |   |   |   |   |   | X | X | X | X | X  |
| 6  |   |   |   |   |   |   | X | X | X | X  |
| 7  |   |   |   |   |   |   |   | X | X | X  |
| 8  |   |   |   |   |   |   |   |   | X | X  |
| 9  |   |   |   |   |   |   |   |   |   | X  |
| 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

Stąd  $|\Omega| = 10 \cdot 10$ .

Jest to model klasyczny.

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu  $A$  są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim. Są to wszystkie pary liczb wyróżnione w pierwszej tablicy lub zaznaczone w drugiej. Jest ich 45. Zatem  $P(A) = 0,45$ .

Uwaga:

Wszystkich par w tej tablicy jest  $10^2$ , na przekątnej łączącej pary  $(1,1)$  i  $(10,10)$  jest ich 10, więc pozostałych par jest  $10^2 - 10$ . Nad przekątną jest tyle samo par co pod nią, więc par, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na drugim jest  $\frac{10^2 - 10}{2}$ .

Zatem  $P(A) = 0,45$ .

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy obliczy  $|\Omega| = 10 \cdot 10$  albo  $|A| = 45$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}$ .

Uwaga:

- Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

**Zadanie 31. (5 punktów)**

Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy długość boiska w pierwszej szkole przez  $a$  i szerokość przez  $b$ .

Wówczas w drugiej szkole długość boiska jest równa  $a + 4$ , szerokość  $b - 8$ .

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ (a + 4)^2 + (b - 8)^2 = 65^2 \end{cases}$$

Przekształcamy układ do postaci

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a^2 + 8a + 16 + b^2 - 16b + 64 = 65^2 \end{cases}$$

a następnie

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a^2 + b^2 + 8a - 16b + 80 = 65^2 \end{cases}$$

skąd otrzymujemy układ

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ 8a - 16b + 80 = 0 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ a = 2b - 10 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość  $a$  do pierwszego równania i rozwiązujemy równanie

kwadratowe  $(2b - 10)^2 + b^2 = 65^2$ .

Po uporządkowaniu otrzymujemy:  $b^2 - 8b - 825 = 0$ ,  $\Delta = 3364$ ,  $\sqrt{\Delta} = 58$

Rozwiązaniem tego równania są liczby  $b = 33$  oraz  $b = -25$ . Odrzucamy ujemne rozwiązanie i obliczamy  $a = 56$ .

Zatem boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, a więc boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Zapisanie jednego z równań  $a^2 + b^2 = 65^2$  lub  $(a + 4)^2 + (b - 8)^2 = 65^2$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $a$  i  $b$ , np.: 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 65^2 \\ (a+4)^2 + (b-8)^2 = 65^2 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a$  lub  $b$  w postaci:  $(2b-10)^2 + b^2 = 65^2$  lub

$$b^2 - 8b - 825 = 0 \text{ lub } a^2 + \left(\frac{1}{2}a + 5\right) = 65^2 \text{ lub } \frac{1}{4}a^2 + a - 840 = 0.$$

**Uwaga:**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania zadania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt**

- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy wymiary boiska w drugiej szkole
- albo
- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy wymiary boiska w drugiej szkole.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie wymiarów boisk w obu szkołach:

Boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, natomiast boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

**Uwaga:**

Jeśli zdający odgadnie poprawne wymiary boisk, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 32. (4 punkty)**

Ile jest liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie następujące cztery warunki:

- (1) cyfry setek, dziesiątek i jedności są parzyste,
- (2) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
- (3) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności,
- (4) w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 9.

**Rozwiązanie**

Trzy ostatnie cyfry są parzyste i uporządkowane malejąco. Mamy więc 10 możliwości ustawienia tych cyfr tak, by spełnione były warunki (1), (2) i (3):

— — 4 2 0  
— — 6 2 0  
— — 8 2 0  
— — 6 4 0  
— — 8 4 0  
— — 8 6 0  
— — 6 4 2  
— — 8 4 2  
— — 8 6 2  
— — 8 6 4

Pierwszą cyfrą liczby może być dowolna spośród cyfr: 1, 2, ..., 8, a drugą dowolna spośród cyfr: 0, 1, 2, ..., 8.

Mamy więc  $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$  możliwości utworzenia liczb spełniających podane warunki.

**Uwaga:** Trzy wybrane cyfry parzyste można ustawić w porządku malejącym dokładnie na jeden sposób. Tak więc liczba tych możliwych jest równa  $\binom{5}{3} = 10$ .

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy z nich polega na obliczeniu

- liczby możliwości ustawienia trzech cyfr parzystych spełniających warunki (1), (2) i (3); tych możliwości jest 10.
- liczby możliwości wyboru pierwszej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 8.
- liczby możliwości wyboru drugiej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 9.

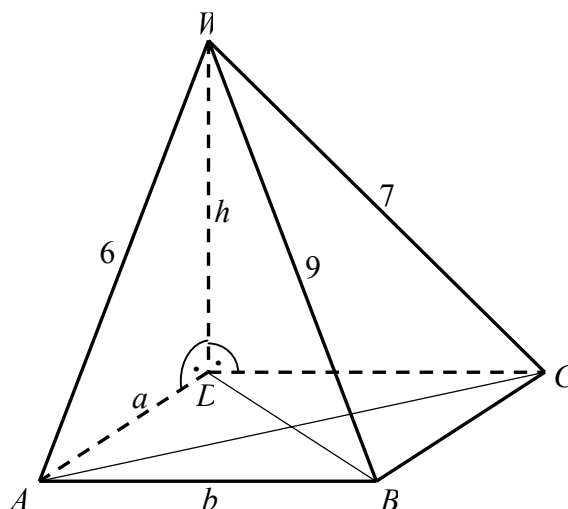
Za obliczenie każdej z tych liczb, zdający otrzymuje 1 punkt.

Drugi etap polega na wykorzystaniu reguły mnożenia i stwierdzeniu, że liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie warunki (1), (2), (3) i (4) jest 720. Za tę część zdający otrzymuje 1 punkt.

### Zadanie 33. (4 punkty)

Podstawą ostrosłupa  $ABCDW$  jest prostokąt  $ABCD$ . Krawędź boczna  $DW$  jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne  $AW$ ,  $BW$  i  $CW$  mają następujące długości:  $|AW| = 6$ ,  $|BW| = 9$ ,  $|CW| = 7$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

#### I sposób rozwiązania



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa  $|AD| = a$ ,  $|AB| = b$  i  $|DW| = h$ .

Trójkąty  $BAW$  i  $BCW$  są prostokątne, więc korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równania  $a^2 + 49 = 81$  i  $b^2 + 36 = 81$ .

Stąd otrzymujemy  $a = 4\sqrt{2}$  oraz  $b = 3\sqrt{5}$ .

Wysokość ostrosłupa obliczymy korzystając z twierdzenia Pitagorasa np. dla trójkąta  $ADW$ .

$$h = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 32} = 2.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Wykorzystanie faktu, że trójkąty  $BAW$  i  $BCW$  są prostokątne i **zapisanie przynajmniej jednego równania**, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa, np.:

$$a^2 + 49 = 81 \text{ albo } b^2 + 36 = 81.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie długości obu krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a = 4\sqrt{2}$  i  $b = 3\sqrt{5}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

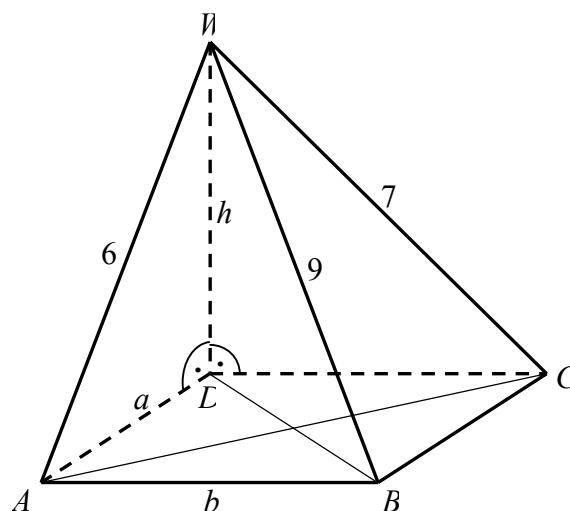
Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa:

$$h = 2, a = 4\sqrt{2}, b = 3\sqrt{5}.$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 8\sqrt{10}$ .

## II sposób rozwiązania



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa  $|AD| = a$ ,  $|AB| = b$  i  $|DW| = h$ .

Trójkąty  $ADW$ ,  $CDW$ ,  $BDW$  i  $BAD$  są prostokątne, więc korzystając czterokrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}$$

Dodajemy pierwsze i drugie równania stronami i podstawiamy  $a^2 + b^2 = 85 - 2h^2$  do trzeciego równania. Otrzymamy  $h^2 = 4$ , więc  $h = 2$ .

Podstawiając  $h = 2$  do pozostałych równań, obliczamy  $a = 4\sqrt{2}$  oraz  $b = 3\sqrt{5}$ .

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

## Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zapisanie układu równań, z którego można obliczyć długości wszystkich odcinków

potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa, np.: 
$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie z powyższego układu jednej z niewiadomych, np.:  $h = 2$  albo  $a = 4\sqrt{2}$  albo  $b = 3\sqrt{5}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa:

$$h = 2, a = 4\sqrt{2}, b = 3\sqrt{5}.$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = 8\sqrt{10}$ .

**Uwaga:**

Jeśli zdający błędnie zaznaczy na rysunku długości krawędzi (zamieni 9 z 6 lub 9 z 7) albo błędnie zinterpretuje treść zadania pisząc np.:  $a^2 + 9^2 = 7^2$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.