



Materiały diagnostyczne z matematyki poziom podstawowy

czerwiec 2011

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania

Materiały diagnostyczne przygotowała **Agata Siwik** we współpracy z nauczycielami matematyki szkół ponadgimnazjalnych:

Ewa Ziętek

Nauczyciel V Liceum Ogólnokształcącego im. Wspólnej Europy w Olsztynie

Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie

Irena Jakóbowska

Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

Elżbieta Guziejko

Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku

Ewa Olszewska

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku

Dyrektor Liceum Ogólnokształcącego Wschodnioeuropejskiego Instytutu Gospodarki w Białymstoku

Andrzej Gołota

Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Mechanicznych w Elblągu

Konsultant ds. matematyki Warmińsko-Mazurskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli w Elblągu

Jan Żukowski

Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcącego im. M. Konopnickiej w Suwałkach

Doradca metodyczny Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Ustawicznego w Suwałkach

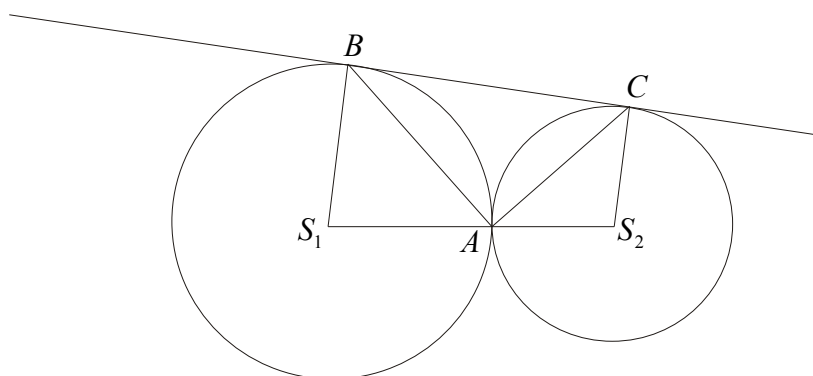
Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
odpowiedź	A	A	D	C	B	B	B	C	C	C	A	B	B

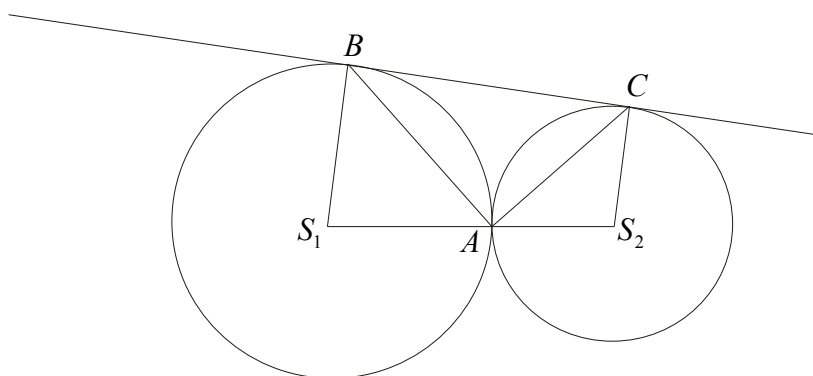
Schemat punktowania zadań otwartych

Zadanie 14. (2 pkt)

Dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A . Poprowadzono prostą styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach B i C (patrz rysunek). Wykaż, że kąt BAC jest prosty.



I sposób rozwiązania



Odcinki S_1B i S_2C są równoległe, bo styczna do obu okręgów jest prostopadła do promieni poprowadzonych do punktów styczności, stąd $|\sphericalangle BS_1A| + |\sphericalangle AS_2C| = 180^\circ$.

Miara kąta środkowego w okręgu jest dwukrotnie większa od miary kąta dopisanego opartego na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BS_1A|$ oraz $|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CS_2A|$ stąd wynika, że $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BCA| = 90^\circ$.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° , zatem $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$.

Schemat oceniania I sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

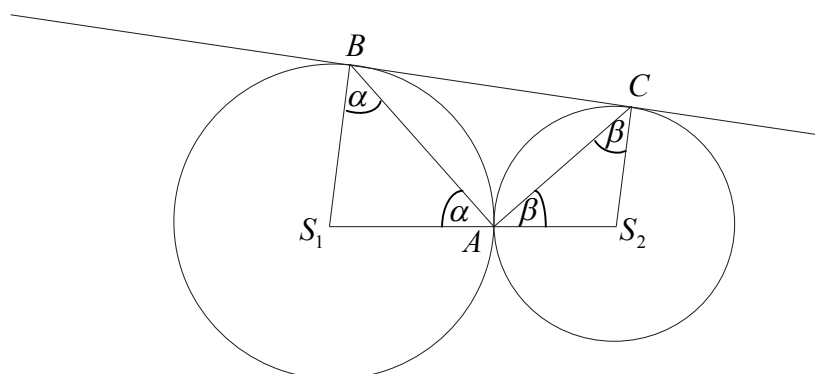
- zauważy, że odcinki S_1B i S_2C są równoległe oraz wykorzysta twierdzenie, że miara kąta środkowego w okręgu jest dwukrotnie większa od miary kąta dopisanego opartego na tym samym łuku. Wystarczy, że zapisze np.: $|\sphericalangle BS_1A| + |\sphericalangle AS_2C| = 180^\circ$ i $|\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BS_1A|$ oraz $|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CS_2A|$.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że, $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BCA| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$.

II sposób rozwiązania



Trójkąty BS_1A i CS_2A są równoramienne. Zatem $|\sphericalangle S_1BA| = |\sphericalangle S_1AB| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CAS_2| = |\sphericalangle ACS_2| = \beta$.

Odcinki S_1B i S_2C są prostopadłe do stycznej, stąd $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ - \beta$.

Niech $|\sphericalangle BAC| = \gamma$.

Kąty ABC , BCA i BAC są kątami wewnętrznymi trójkąta BAC ,
więc $90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ$, stąd $\alpha + \beta = \gamma$.

Kąt S_1AS_2 jest półpełny, więc $|\sphericalangle S_1AS_2| = 180^\circ = \alpha + \gamma + \beta$, stąd $2\gamma = 180^\circ$ czyli $\gamma = |\sphericalangle BAC| = 90^\circ$.

Schemat oceniania II sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

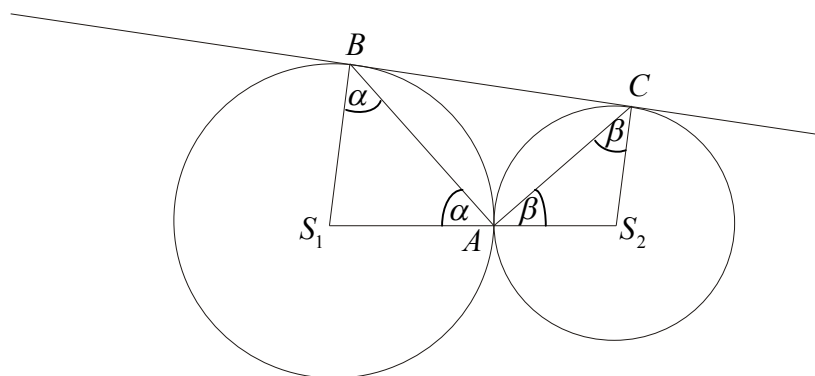
- zauważy, że odcinki S_1B i S_2C są prostopadłe do stycznej, trójkąty BS_1A i CS_2A są równoramienne i zapisze zależność $90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + \gamma = 180^\circ$.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- zapisze, że $|\sphericalangle S_1AS_2| = 180^\circ = \alpha + \gamma + \beta$ i obliczy miarę kąta BAC : $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$.

III sposób rozwiązania



Trójkąty S_1AB i AS_2C są równoramienne. Zatem $|\sphericalangle S_1AB| = |\sphericalangle S_1BA| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle S_2AC| = |\sphericalangle ACS_2| = \beta$.

Kąty S_1AB , S_1BA , BS_1A są kątami wewnętrznymi trójkąta S_1AB , więc $|\sphericalangle BS_1A| = 180^\circ - 2\alpha$.

Czworokąt S_1S_2CB jest trapezem więc $|\sphericalangle AS_2C| = 2\alpha$.

Suma miar kątów trójkąta AS_2C jest równa:

$$|\sphericalangle AS_2C| + |\sphericalangle S_2AC| + |\sphericalangle ACS_2| = 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ, \text{ stąd } 2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ więc } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Kąt S_1AS_2 jest półpełny więc $|\sphericalangle BAC| + \alpha + \beta = 180^\circ$, zatem $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$.

Schemat oceniania III sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- zauważy, że trójkąty S_1AB i AS_2C są równoramienne, zapisze $|\sphericalangle S_1AB| = |\sphericalangle S_1BA|$ i $|\sphericalangle S_2AC| = |\sphericalangle ACS_2|$ i $|\sphericalangle BS_1A| = 180^\circ - 2\alpha$ oraz zauważy, że czworokąt S_1S_2CB jest trapezem więc $|\sphericalangle AS_2C| = 2\alpha$.

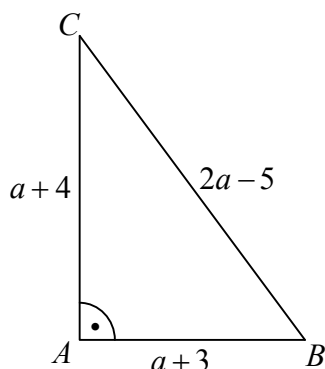
Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- zapisze, że suma kątów trójkąta AS_2C jest równa: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, więc $\alpha + \beta = 90^\circ$ i kąt S_1AS_2 jest półpełny więc, zatem $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$.

Zadanie 15. (2 pkt)

Trójkąt ABC jest prostokątny. W trójkącie tym miara kąta BAC jest równa 90° , $|AB| = a + 3$, $|AC| = a + 4$, $|BC| = 2a - 5$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$(a + 3)^2 + (a + 4)^2 = (2a - 5)^2 \text{ i } a > 2,5$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$2a^2 - 34a = 0.$$

Wtedy $a_1 = 0$ (sprzeczne z założeniem) oraz $a_2 = 17$.

Obliczamy długości boków tego trójkąta: $|AB| = 20$, $|AC| = 21$, $|BC| = 29$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- rozwiąże równanie $(a + 3)^2 + (a + 4)^2 = (2a - 5)^2$: $a = 17$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- obliczy długości boków $|AB| = 20$, $|AC| = 21$, $|BC| = 29$.

Uwagi

- Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy długości boków tego trójkąta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
- Jeżeli zdający błędnie zapisze równanie kwadratowe, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 16. (2 pkt)

Zbadaj, czy istnieje taki kąt ostry α , dla którego $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Odpowiedź uzasadnij.

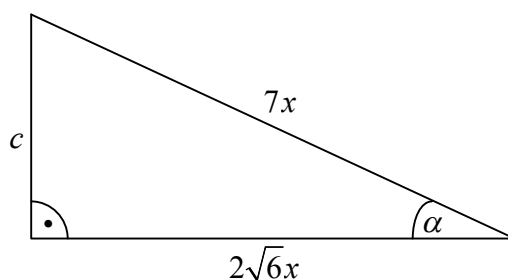
I sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:

$2\sqrt{6}x$ - długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α

$7x$ - długość przeciwprostokątnej

c - długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie: $(2\sqrt{6}x)^2 + c^2 = (7x)^2$.

Wtedy $c = 5x$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5x}{2\sqrt{6}x} = \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

Z treści zadania wynika, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α .

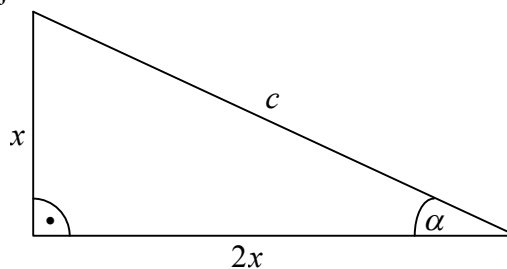
II sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:

x - długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α

$2x$ - długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α

c - długość przeciwprostokątnej



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie: $(2x)^2 + x^2 = c^2$. Wtedy $c = \sqrt{5}x$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\cos x = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Z treści zadania wynika, że $\cos x = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α .

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- zaznaczy kąt α w trójkącie prostokątnym i wyznaczy długości jego boków w zależności od współczynnika proporcjonalności np.: $5x, 2\sqrt{6}x, 7x$ lub $x, 2x, \sqrt{5}x$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Zdający może przyjąć współczynnik proporcjonalności równy 1.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- obliczy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$, porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- obliczy $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

III sposób rozwiązania

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy: $\sin^2 \alpha + \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 = 1$, a stąd

$$\sin \alpha = \frac{5}{7}. \quad (\alpha \text{ kąt ostry } (\sin \alpha > 0)).$$

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ otrzymujemy } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Z treści zadania wynika, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α .

IV sposób rozwiązania

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ otrzymujemy } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}.$$

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy: $\left(\frac{\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 = \frac{30}{49} \neq 1$.

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α .

Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- obliczy wartość $\sin \alpha = \frac{5}{7}$ korzystając ze związku $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- obliczy wartość $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}$ korzystając ze związku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- obliczy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ (gdy $\sin \alpha = \frac{5}{7}$), porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- podstawí wartość $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}$ do związku $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

V sposób rozwiązania

Dla $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta: $\alpha \approx 46^\circ$ (akceptujemy $\alpha \approx 45^\circ$).

Dla $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta: $\alpha \approx 27^\circ$ (akceptujemy $\alpha \approx 26^\circ$).

Otrzymane wyniki (różne miary kąta α w tym samym trójkącie) pozwalają stwierdzić, że taki kąt nie istnieje.

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta dla $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$: $\alpha \approx 46^\circ$ (akceptujemy $\alpha \approx 45^\circ$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta dla $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$: $\alpha \approx 27^\circ$ (akceptujemy $\alpha \approx 26^\circ$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- dla wyznaczonej wartości kąta α (gdy $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$) odczyta z tablic wartość $\operatorname{tg} \alpha$, porówna ją z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- dla wyznaczonej wartości kąta α (gdy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$) odczyta z tablic wartość $\cos\alpha$, porówna ją z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

Uwagi

1. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt α w przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
2. Jeśli zdający narysuje dwa trójkąty prostokątne, oznaczy długości boków odpowiednio: $5, 2\sqrt{6}, 7$ i $1, 2, \sqrt{5}$ (lub na jednym z nich zaznaczy długości boków obu trójkątów) bez współczynnika proporcjonalności i stwierdzi, że boki mają różną długość, zatem nie istnieje taki kąt, to otrzymuje **0 punktów**. W takim przypadku wymagamy udowodnienia, że boki takich trójkątów nie są proporcjonalne.
3. Jeśli zdający nie odrzuci odpowiedzi ujemnej, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 17. (2 pkt)

Ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = -2 \cdot 3^{n+1}$. Oblicz iloraz tego ciągu oraz sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Obliczamy iloraz ciągu (a_n) : $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot 3^{n+2}}{-2 \cdot 3^{n+1}} = 3$

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu (a_n) : $a_1 = -2 \cdot 3^2 = -18$.

Obliczamy sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu wykorzystując wzór na sumę

n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$:

$$S_4 = -18 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = -18 \cdot 40 = -720.$$

Uwaga

Zdający może obliczyć sumę ciągu geometrycznego wykorzystując wzór:

$$S_4 = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = -18 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) = -720 \text{ lub}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \text{gdzie} \quad a_1 = -2 \cdot 3^2 = -18, \quad a_2 = -2 \cdot 3^3 = -54, \quad a_3 = -2 \cdot 3^4 = -162, \\ a_4 = -2 \cdot 3^5 = -486.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 punkt

gdy:

- obliczy $a_1 = -18$ i obliczy iloraz ciągu (a_n) : $q = 3$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

- obliczy $a_1 = -18$, $a_2 = -54$, $a_3 = -162$, $a_4 = -486$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty

gdy:

- iloraz tego ciągu oraz sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu.

Uwagi

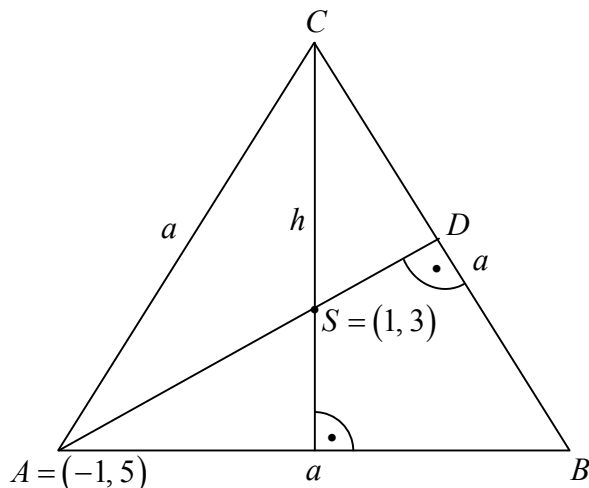
1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszego wyrazu lub ilorazu tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy przy obliczaniu czterech pierwszych wyrazów tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 18. (4 pkt)

Dany jest trójkąt równoboczny ABC , w którym wysokości przecinają się w punkcie o współrzędnych $S = (1, 3)$. Jeden z wierzchołków tego trójkąta ma współrzędne $A = (-1, 5)$. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

I sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt równoboczny ABC i wprowadzamy oznaczenia np.:



Korzystamy z własności trójkąta równobocznego i zapisujemy : $|AS| = \frac{2}{3}|AD|$,

$$|AD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Obliczamy $|AS| = \sqrt{(1+1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, zatem $\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$ stąd $a = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole trójkąta: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.

Obliczamy obwód trójkąta: $O = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 punkt

- obliczenie długości odcinka $|AS| = 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 punkty

- zauważenie, że $|AS| = \frac{2}{3}h$ i zapisanie równości $\frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}$.

albo

- obliczenie wysokości $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$.

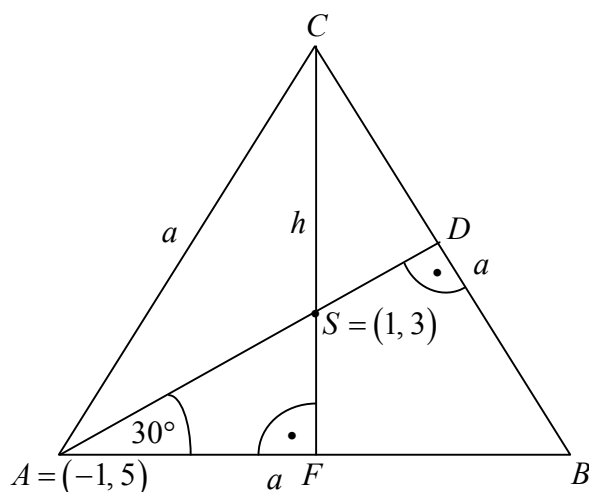
Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 punkty

- obliczenie długości boku trójkąta równobocznego: $a = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne 4 punkty

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$, $O = 6\sqrt{6}$.

II sposób rozwiązania



Obliczamy długość odcinka $|AS| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

Z trójkąta AFS obliczamy długość boku AF : $\cos 30^\circ = \frac{|AF|}{|AS|}$, stąd $|AF| = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

Obliczamy długość boku trójkąta: $a = 2 \cdot |AF| = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole trójkąta: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$

Obliczamy obwód trójkąta: $O = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1punkt

- obliczenie długości odcinka $|AS| = 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2punkty

- zauważenie, że trójkąt $\triangle SAF$ ma $\angle SAF = 30^\circ$ i zapisanie $\cos 30^\circ = \frac{|AF|}{|AS|}$.

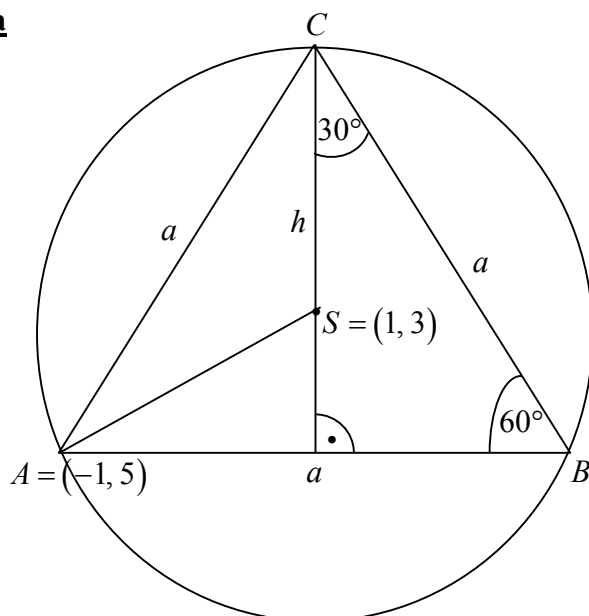
Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3punkty

- obliczenie długości boku trójkąta równobocznego: $a = 2|AF| = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne.....4 punkty

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$, $O = 6\sqrt{6}$.

III sposób rozwiązania



Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym. Punkt A należy do tego okręgu.

Korzystamy z równania okręgu i otrzymujemy: $(-1-1)^2 + (5-3)^2 = r^2$, stąd $r^2 = 8$, zatem $r = 2\sqrt{2}$.

Obliczamy długość boku trójkąta: $r = |AS| = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem $a = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole trójkąta: $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.

Obliczamy obwód trójkąta: $O = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$.

Uwaga

Zdający może obliczyć wysokość trójkąta równobocznego $h = 3\sqrt{2}$, następnie obliczyć długość boku trójkąta z twierdzenia Pitagorasa lub z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° .

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1punkt

- obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym:
 $r = 2\sqrt{2}$.

Uwaga

Zdający może przedstawić wynik w postaci $r = \sqrt{8}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2punkty

- Zauważenie, że $r = \frac{2}{3}h$ i zapisanie równości $\frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3punkty

- Obliczenie długości boku trójkąta równobocznego: $a = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne.....4 punkty

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$, $O = 6\sqrt{6}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeśli zdający przyjmie, że S jest środkiem wysokości trójkąta równobocznego $\left(|AS| = \frac{1}{2}h\right)$, to za całe rozwiązanie przyznajemy **1 punkt** (za obliczenie $|AS|$).

Zadanie 19. (5 pkt)

Dwie prostokątne działki rekreacyjne mają taką samą powierzchnię równą 310m^2 . Długość drugiej działki jest o 4,8 m krótsza od długości pierwszej, a szerokość o 3 m dłuższa od szerokości pierwszej. Podaj wymiary działki o mniejszym obwodzie.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia np.: x, y - wymiary I działki: x - długość, y - szerokość

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x - 4,8) \cdot (y + 3) = 310 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x \cdot y + 3x - 4,8y - 14,4 = 310$, podstawiamy do tego równania $x \cdot y = 310$ i wyznaczamy z tego równania niewiadomą x : $x = 1,6y + 4,8$.

Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania $(1,6y + 4,8) \cdot y = 310$ i doprowadzamy to równanie do postaci: $1,6y^2 + 4,8y - 310 = 0$, które ma dwa rozwiązania $y_1 = -15,5$ (nie spełnia warunków zadania) i $y_2 = 12,5$.

Zatem, jeżeli $y = 12,5$, to $x = 24,8$ i wtedy działka I ma wymiary: 24,8 m x 12,5 m, zaś działka II: 20 m x 15,5 m.

Obliczamy obwód I działki: $2 \cdot 24,8 + 2 \cdot 12,5 = 74,6$ m.

Obliczamy obwód II działki: $2 \cdot 20 + 2 \cdot 15,5 = 71$ m.

Zapisujemy odpowiedź: Działka o mniejszym obwodzie ma wymiary: 20 m x 15,5 m.

albo

Przyjmujemy oznaczenia np.: x, y - wymiary II działki: x - długość, y - szerokość

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x + 4,8) \cdot (y - 3) = 310 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x \cdot y - 3x + 4,8y - 14,4 = 310$, podstawiamy do tego równania $x \cdot y = 310$ i wyznaczamy z tego równania niewiadomą x : $x = 1,6y - 4,8$.

Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania $(1,6y - 4,8) \cdot y = 310$ i doprowadzamy to równanie do postaci: $1,6y^2 - 4,8y - 310 = 0$, które ma dwa rozwiązania $y_1 = 15,5$ i $y_2 = -12,5$ (nie spełnia warunków zadania).

Zatem, jeżeli $y = 15,5$, to $x = 20$ i wtedy działka II ma wymiary: 20 m x 15,5 m, zaś działka I: 24,8 m x 12,5 m.

Obliczamy obwód II działki: $2 \cdot 20 + 2 \cdot 15,5 = 71$ m.

Obliczamy obwód I działki: $2 \cdot 24,8 + 2 \cdot 12,5 = 74,6$ m.

Zapisujemy odpowiedź: Działka o mniejszym obwodzie ma wymiary: 20 m x 15,5 m.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- wprowadzenie oznaczeń, np.: x, y - wymiary I działki i zapisanie równania $(x-4,8) \cdot (y+3) = 310$.

albo

- wprowadzenie oznaczeń, np.: x, y - wymiary II działki i zapisanie równania $(x+4,8) \cdot (y-3) = 310$.

Uwaga

Nie wymagamy opisanie oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y , np.:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x-4,8) \cdot (y+3) = 310 \end{cases}, \text{ gdzie } x, y - \text{ wymiary I działki}$$

albo

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x+4,8) \cdot (y-3) = 310 \end{cases}, \text{ gdzie } x, y - \text{ wymiary II działki}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może od razu zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y , np:

$$1,6y^2 + 4,8y - 310 = 0, \text{ gdzie } y - \text{ szerokość I działki}$$

albo

$$x^2 - 4,8x - 496 = 0, \text{ gdzie } x, - \text{ długość I działki}$$

albo

$$1,6y^2 - 4,8y - 310 = 0, \text{ gdzie } y - \text{ szerokość II działki}$$

albo

$$x^2 + 4,8x - 496 = 0, \text{ gdzie } x, - \text{ długość II działki}$$

Rozwiązanie prawie całkowite 4 pkt

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą y : $y = 12,5$ i obliczenie długości I działki: $x = 24,8$.

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x : $x = 24,8$ i obliczenie szerokości I działki: $y = 12,5$.

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą y : $y = 15,5$ i obliczenie długości II działki: $x = 20$.

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x : $x = 20$ i obliczenie szerokości II działki: $y = 15,5$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Rozwiązanie równania z niewiadomą x lub y z błędem rachunkowym i konsekwentne rozwiązanie zadania do końca.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Podanie wymiarów działki o mniejszym obwodzie: $20 \text{ m} \times 15,5 \text{ m}$.

Uwagi

- Jeżeli zdający **podaje** (bez obliczeń) odpowiedź: wymiary działki o mniejszym obwodzie, to: $20 \text{ m} \times 15,5 \text{ m}$, otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający od razu zapisze i uzasadni, że obwód drugiej działki jest mniejszy i na tym poprzestanie, otrzymuje **1 punkt**. np.:
 $O_1 = 2 \cdot (x + y)$ i $O_2 = 2 \cdot (x + 3 + y - 4,8) = 2 \cdot (x + y - 1,8)$, zatem $O_1 > O_2$.