



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Centralna
Komisja
Egzaminacyjna

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Próbny egzamin maturalny z matematyki 2010

Klucz punktowania do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania do zadań otwartych

Klucz punktowania do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	C	B	D	A	C	A	A	B	B	A	D	A	C	B	D	C	C	A	C	B	C	C	A	B	D

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 11x + 30 \leq 0$.

I sposób rozwiązania

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego:

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki tego trójmianu:

$$\Delta = 1, \quad x_1 = \frac{-11-1}{2} = -6, \quad x_2 = \frac{-11+1}{2} = -5$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = -11 \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = 30$$

i stąd $x_1 = -6$, $x_2 = -5$

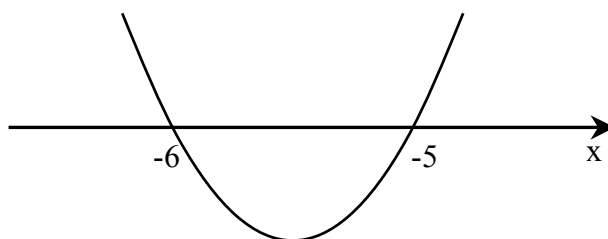
albo

- rozkładamy trójmian na czynniki, np.:
 - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,
 - korzystając z postaci kanonicznej

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{11}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x+5)(x+6),$$

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi i odczytujemy zbiór rozwiązań



albo

- rozwiązujemy nierówność $(x+5)(x+6) \leq 0$ analizując znaki czynników.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\langle -6, -5 \rangle$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy poda poprawnie pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle -6, -5 \rangle$ lub $x \in \langle -6, -5 \rangle$ lub $(x \geq -6 \text{ i } x \leq -5)$

Zadanie 27. (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$$(x+2)(x^2-5)=0$$

Stąd $x = -2$ lub $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- poda poprawną postać iloczynową wielomianu po lewej stronie równania
 $(x+2)(x^2-5)=0$ lub $(x+2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze postać iloczynową z błędem (o ile otrzymany wielomian jest stopnia trzeciego i ma trzy różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu poda rozwiązania równania.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $-\sqrt{5}, -2, \sqrt{5}$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu. Zdzielmy wielomian $x^3 + 2x^2 - 5x - 10$ przez dwumian $x+2$ i otrzymujemy x^2-5 . Zapisujemy równanie w postaci $(x+2)(x^2-5)=0$. Stąd $x = -2$ lub $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- podzieli wielomian $x^3 + 2x^2 - 5x - 10$ przez dwumian $x+2$ otrzymując x^2-5 i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- podzieli wielomian z błędem (o ile otrzymany iloraz jest stopnia drugiego i ma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu poda rozwiązanie równania.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $-\sqrt{5}, -2, \sqrt{5}$.

Uwaga:

1. Jeżeli zdający zapisze $x(x^2-5)2(x^2-5)=0$ (brak znaku przed liczbą 2) lub $x^2(x+2)5(x+2)=0$ (brak znaku przed liczbą 5) i na tym zakończy, to otrzymuje

- 0 punktów.** Jeżeli natomiast kontynuuje rozwiązanie i zapisze $(x+2)(x^2-5)=0$, to oceniamy to rozwiązanie tak, jakby ten błąd nie wystąpił.
2. Jeśli zdający wykonał dzielenie przez dwumian $x-p$ nie zapisując, że p jest jednym z rozwiązań równania $x^3+2x^2-5x-10=0$ i w końcowej odpowiedzi pominie pierwiastek p podając tylko pierwiastki trójmianu kwadratowego, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 28. (2 pkt)

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Niech x oznacza długość przeciwprostokątnej. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$(x-1)^2 + (x-32)^2 = x^2 \quad \text{ i } x > 32$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$x^2 - 66x + 1025 = 0.$$

Wtedy $x_1 = 25$ (sprzeczne z założeniem) oraz $x_2 = 41$.

Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość 41 cm, jedna przyprostokątna ma długość 9 cm a druga ma długość 40 cm.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze równanie $x^2 + (x+31)^2 = (x+32)^2$, gdzie $x+32$ jest długością przeciwprostokątnej, to po przekształceniach otrzyma równanie $x^2 - 2x - 63 = 0$. Wtedy $x = 9$ lub $x = -7$.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie $x^2 + (x-31)^2 = (x+1)^2$, gdzie $x+1$ jest długością przeciwprostokątnej, to po przekształceniach otrzyma równanie $x^2 - 64x + 960 = 0$, gdy $x+1$ jest długością przeciwprostokątnej. Wtedy $x = 40$ lub $x = 24$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą.

To równanie w zależności od przyjętych oznaczeń może mieć postać:

$$(x-1)^2 + (x-32)^2 = x^2, \text{ gdy } x \text{ jest długością przeciwprostokątnej}$$

albo

$$x^2 + (x+31)^2 = (x+32)^2, \text{ gdy } x+32 \text{ jest długością przeciwprostokątnej}$$

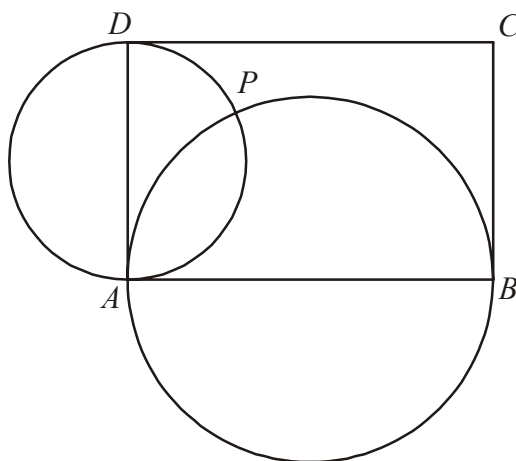
albo

$$x^2 + (x-31)^2 = (x+1)^2, \text{ gdy } x+1 \text{ jest długością przeciwprostokątnej.}$$

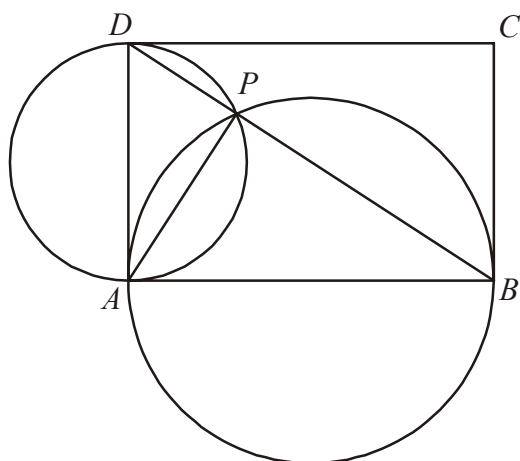
Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy długości boków tego trójkąta: 9 cm, 40 cm i 41 cm.

Zadanie 29. (2 pkt)

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B , P i D leżą na jednej prostej.



I sposób rozwiązania



Łączymy punkt P z punktami A , B i D . Kąt APD jest oparty na półokręgu, więc $|\sphericalangle APD| = 90^\circ$. Podobnie kąt APB jest oparty na półokręgu, więc $|\sphericalangle APB| = 90^\circ$. Zatem

$$|\sphericalangle DPB| = |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle APB| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

czyli punkty B , P i D są współliniowe.

Uwaga.

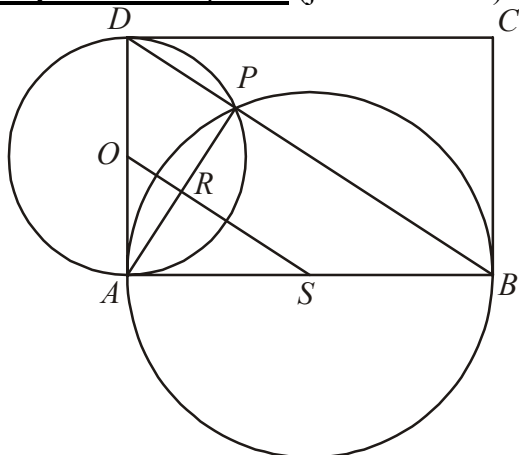
Po uzasadnieniu, że trójkąty APD i APB są prostokątne możemy również zastosować twierdzenie Pitagorasa dla tych trójkątów i trójkąta ABD , otrzymując równość $|BD| = |BP| + |PD|$, która oznacza współliniowość punktów B , P i D .

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy zauważy, że $|\sphericalangle APD| = 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle APB| = 90^\circ$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy lub gdy w jego rozumowaniu występują luki.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy uzasadni, że $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle APB| = 90^\circ$ i wywnioskuje, że punkty B , P i D są współliniowe.

II sposób rozwiązania (jednokładność)



Niech O i S będą środkami obu okręgów i R będzie punktem przecięcia odcinków AP i OS .

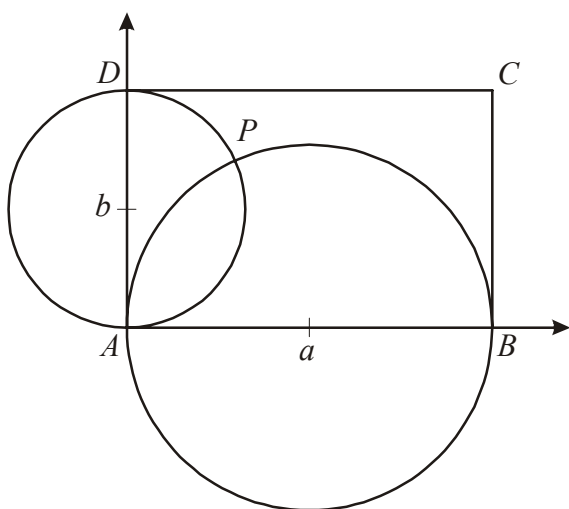
Odcinek OS łączący środki okręgów dzieli ich wspólną cięciwę na połowy, więc $|AR| = |RP|$.

Wtedy punkty D , P i B są obrazami punktów współliniowych O , R , S w jednokładności o środku A i skali 2, więc są współliniowe.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy zauważy i uzasadni, że punkty D , P i B są obrazami punktów współliniowych O , R , S w jednokładności o środku A i skali 2, więc są współliniowe.

III sposób rozwiązania (metoda analityczna)



Umieszczamy okręgi w układzie współrzędnych, tak jak na rysunku.

Zapisujemy układ równań (równania okręgów):

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + (y-b)^2 = b^2 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy współrzędne punktu P :

$$P = \left(\frac{2ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{2a^2b}{a^2 + b^2} \right).$$

Równanie prostej BD ma postać $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$.

Ponieważ

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{2ab^2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2b} \cdot \frac{2a^2b}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} = 1,$$

wiec punkt P leży na prostej BD .

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

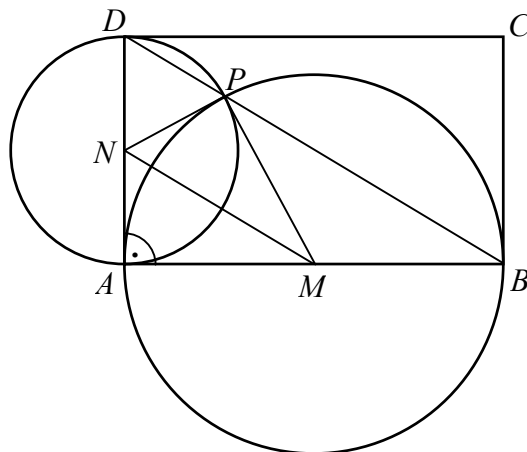
Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze układ równań: $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + (y-b)^2 = b^2 \end{cases}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wykaże, że punkt P leży na prostej BD .

IV sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Odcinki NA i NP są promieniami okręgu o średnicy AD , więc $|AN| = |PN|$. Podobnie odcinki MA i MP są promieniami okręgu o średnicy AB , więc $|AM| = |PM|$. Zatem czworokąt $AMPN$ jest deltoidem. Stąd wynika, że $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle NPM|$. Ale $|\sphericalangle NAM| = 90^\circ$, więc

$$(1) \quad |\sphericalangle NPM| = 90^\circ$$

Trójkąty NPD i MBP są równoramienne, bo $|PN| = |DN|$ oraz $|PM| = |BM|$. Stąd wynika, że

$$(2) \quad |\sphericalangle NPD| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle PND|}{2} \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle MPB| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle PMB|}{2}.$$

Z faktu, że $AMPN$ jest deltoidem wynika ponadto, że

$$(3) \quad |\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle PMN| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle PNM|.$$

Trójkąt AMN jest prostokątny, więc

$$(4) \quad |\sphericalangle ANM| + |\sphericalangle AMN| = 90^\circ.$$

Obliczmy teraz miarę kąta BPD

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BPD| &= |\sphericalangle MPB| + |\sphericalangle NPM| + |\sphericalangle NPD| \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{180^\circ - |\sphericalangle PMB|}{2} + 90^\circ + \frac{180^\circ - |\sphericalangle PND|}{2} = \\ &= 270^\circ - \frac{1}{2}(|\sphericalangle PMB| + |\sphericalangle PND|) \stackrel{(3)}{=} 270^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle AMN| + 180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle ANM|) = \\ &= 90^\circ + (|\sphericalangle AMN| + |\sphericalangle ANM|) \stackrel{(4)}{=} 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

To oznacza, że punkty B , P i D są współliniowe.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy zauważy, że czworokąt $AMPN$ jest deltoidem, uzasadni, że kąt MPN jest prosty i zapisze wszystkie równości między miarami kątów w trójkątach: DNP , BMP , AMN , MNP , pozwalające wykazać, że $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle MPB| + |\sphericalangle NPM| + |\sphericalangle NPD| = 180^\circ$.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wykaże, że $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle MPB| + |\sphericalangle NPM| + |\sphericalangle NPD| = 180^\circ$.

Zadanie 30. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

Rozwiązanie

Przekształcając $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$ otrzymujemy kolejno:

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$$

$$a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = 0$$

$$(ad - bc)^2 = 0$$

$$ad = bc$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy przeprowadzi pełny dowód twierdzenia.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przeprowadzi rozumowanie pomijając niektóre przypadki np. rozważy tylko dodatnie wartości iloczynów ad i bc , to przyznajemy **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość twierdzenia dla konkretnych wartości a, b, c, d , to przyznajemy **0 punktów**.

Zadanie 31. (2 pkt)

Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w zapisie których pierwsza cyfra jest parzysta a pozostałe nieparzyste?

Rozwiązanie

W zapisie danej liczby na pierwszym miejscu może wystąpić jedna z cyfr: 2, 4, 6, 8, czyli mamy 4 możliwości. Na drugim miejscu może być jedna z cyfr: 1, 3, 5, 7, 9, czyli mamy 5 możliwości. Tak samo na trzecim i czwartym miejscu. Zatem mamy $4 \cdot 5^3 = 500$ takich liczb.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- poprawnie obliczy, ile jest możliwości wystąpienia cyfry na pierwszym miejscu i dalej popełnia błąd lub na tym poprzestanie

albo

- poprawnie obliczy, ile jest możliwości wystąpienia cyfry na drugim, trzecim i czwartym miejscu a popełni błąd podając liczbę cyfr na pierwszym miejscu.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poprawnie obliczy, ile jest szukanych liczb: $4 \cdot 5^3$, nawet, gdy popełni błąd w obliczeniu tego iloczynu, np. $4 \cdot 5^3 = 600$.

Zadanie 32. (4 pkt)

Ciąg $(1, x, y-1)$ jest arytmetyczny, natomiast ciąg $(x, y, 12)$ jest geometryczny. Oblicz x oraz y i podaj ten ciąg geometryczny.

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie $x = \frac{1+y-1}{2}$, czyli $y = 2x$,

a z własności ciągu geometrycznego wynika równanie $y^2 = x \cdot 12$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 12x \end{cases}$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe $4x^2 - 12x = 0$, a stąd $x = 3$ lub $x = 0$.

Zatem układ równań ma dwa rozwiązania $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$.

Pierwsze rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, gdyż ciąg $(0, 0, 12)$ nie jest geometryczny.

Zatem $x = 3$ i $y = 6$, stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$.

II sposób rozwiązania

Korzystając z definicji ciągów arytmetycznego i geometrycznego otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x = 1 + r \\ y - 1 = x + r \\ y = x \cdot q \\ 12 = y \cdot q \end{cases} \quad \text{przy czym } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0, r \neq -1 \text{ i } q \neq 0.$$

Rozwiązujemy ten układ i otrzymujemy

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ q = 2 \\ r = 2 \end{cases}$$

Zatem $x = 3$ i $y = 6$. Stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego albo geometrycznego (definicji lub wzoru na n -ty wyraz) i zapisanie równania, np.:

- $x = \frac{1+y-1}{2}$ albo równań, np.: $x = 1 + r$ i $y - 1 = x + r$

albo

- $y^2 = x \cdot 12$ albo równań, np.: $y = x \cdot q$ i $12 = y \cdot q$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć x i y , np.:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 12x \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} y = 2x \\ y = x \cdot q \\ 12 = y \cdot q \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} x = 1 + r \\ y - 1 = x + r \\ y^2 = 12x \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} x = 1 + r \\ y - 1 = x + r \\ y = x \cdot q \\ 12 = y \cdot q \end{cases}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, wystarczy, że zapisze wszystkie konieczne zależności.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie i rozwiązanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.:

- $4x^2 - 12x = 0$, stąd $x = 3$ lub $x = 0$
- albo
- $y^2 - 6y = 0$, stąd $y = 0$ lub $y = 6$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $x = 3$ i $y = 6$ oraz zapisanie ciągu geometrycznego $(3, 6, 12)$.

Uwaga

Przyznajemy **4 punkty**, gdy zdający obliczy $x = 3$ i $y = 6$ i poda ciąg geometryczny w postaci $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

III sposób rozwiązania

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie

$$x = \frac{1 + y - 1}{2}, \text{ czyli } y = 2x,$$

natomiast z własności ciągu geometrycznego równanie

$$\frac{12}{y} = \frac{y}{x}, \text{ przy czym } x \neq 0 \text{ oraz } y \neq 0.$$

Rozwiązujemy układ równań
$$\begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{y} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Otrzymujemy kolejno
$$\begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{2x} = \frac{2x}{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{2x} = 2 \end{cases}, \text{ zatem } x = 3 \text{ i } y = 6.$$

Stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (definicji lub wzoru na n -ty wyraz) albo wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (definicji lub wzoru na n -ty wyraz) i zapisanie:

- równania, np.: $x = \frac{1+y-1}{2}$

albo

- równania, np.: $\frac{12}{y} = \frac{y}{x}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć x i y , np.:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{y} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, wystarczy, że zapisze wszystkie konieczne zależności.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie i rozwiązanie równania z niewiadomą x , np.:

$$\frac{12}{2x} = \frac{2x}{x} \text{ i } x = 3.$$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $x = 3$ i $y = 6$ oraz zapisanie ciągu geometrycznego $(3, 6, 12)$.

IV sposób rozwiązania:

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie

$$x = \frac{1+y-1}{2}, \text{ czyli } y = 2x.$$

Ciąg $(x, y, 12)$ jest geometryczny i $y = 2x$, zatem iloraz q tego ciągu jest równy 2.

$$\text{Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy } y = \frac{12}{2} = 6 \text{ i } x = \frac{12}{4} = 3.$$

Zatem $x = 3$ i $y = 6$, a stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania, np.: $x = \frac{1+y-1}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- zapisanie ciągu geometrycznego $(x, 2x, 12)$

albo

- obliczenie ilorazu q tego ciągu: $q = 2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie $x = 3$ lub $y = 6$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $x = 3$ i $y = 6$ oraz zapisanie ciągu geometrycznego $(3, 6, 12)$.

Zadanie 33. (4 pkt)

Punkty $A = (1, 5)$, $B = (14, 31)$, $C = (4, 31)$ są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D . Oblicz długość odcinka BD .

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = 2x + 3$.

Wyznaczamy równanie prostej CD , prostopadłej do prostej AB : $y = -\frac{1}{2}x + 33$.

Obliczamy współrzędne punktu D : $D = (12, 27)$.

Obliczamy długość odcinka BD : $|BD| = 2\sqrt{5}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wyznaczenie równania prostej AB (albo współczynnika kierunkowego a prostej AB albo współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$): $y = 2x + 3$ ($a = 2$, $\overrightarrow{AB} = [13, 26]$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wyznaczenie równania prostej CD : $y = -\frac{1}{2}x + 33$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu D : $D = (12, 27)$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD : $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

II sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = 2x + 3$.

Wyznaczamy równanie prostej CD , prostopadłej do prostej AB : $y = -\frac{1}{2}x + 33$.

Obliczamy odległość punktu $B = (14, 31)$ od prostej CD o równaniu $x + 2y - 66 = 0$:

$$\frac{|14 + 2 \cdot 31 - 66|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}, \text{ więc } |BD| = 2\sqrt{5}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wyznaczenie równania prostej AB (albo współczynnika kierunkowego a prostej AB albo współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$): $y = 2x + 3$ ($a = 2$, $\overrightarrow{AB} = [13, 26]$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wyznaczenie równania prostej CD : $y = -\frac{1}{2}x + 33$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zastosowanie wzoru na odległość punktu B od prostej CD : $\frac{|14 + 2 \cdot 31 - 66|}{\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD : $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

III sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = 2x + 3$.

Obliczamy odległość punktu $C = (4, 31)$ od prostej AB o równaniu $2x - y + 3 = 0$:

$$|CD| = \frac{|2 \cdot 4 - 31 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}}.$$

Obliczamy długość odcinka CB : $|CB| = 10$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB obliczamy długość odcinka BD :

$$\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2, \text{ więc } |BD| = 2\sqrt{5}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Wyznaczenie równania prostej AB : $y = 2x + 3$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie odległości punktu $C = (4, 31)$ od prostej AB o równaniu $2x - y + 3 = 0$:

$$|CD| = \frac{|2 \cdot 4 - 31 + 3|}{\sqrt{5}} \text{ lub } |CD| = \frac{20}{\sqrt{5}} \text{ lub } |CD| = 4\sqrt{5}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB : $\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD : $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

IV sposób rozwiązania

Obliczamy długość odcinka CB oraz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A :

$$|CB| = 10, h_A = 26.$$

Obliczamy pole trójkąta ABC : $P_{ABC} = \frac{10 \cdot 26}{2} = 130$.

Obliczamy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{845}$.

Pole trójkąta ABC możemy zapisać: $P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2}$. Zatem $\frac{13\sqrt{5} \cdot |CD|}{2} = 130$.

Stąd $|CD| = 4\sqrt{5}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB obliczamy długość odcinka BD :

$$(4\sqrt{5})^2 + |BD|^2 = 10^2, \text{ więc } |BD| = 2\sqrt{5}.$$

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Obliczenie pola trójkąta AB : $P_{ABC} = 130$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Obliczenie długości odcinka CD : $|CD| = 4\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB : $(4\sqrt{5})^2 + |BD|^2 = 10^2$.

Rozwiązanie pełne.....4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD : $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

V sposób rozwiązania

Obliczamy długości wszystkich boków trójkąta ABC : $|AB| = \sqrt{845}$, $|AC| = \sqrt{685}$, $|CB| = 10$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów CDB i ADC zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} |CB|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 \\ |CA|^2 = (|AB| - |BD|)^2 + |CD|^2 \end{cases}$$

Wyznaczając $|CD|^2$ z pierwszego równania i podstawiając do drugiego równania otrzymujemy:

$$(\sqrt{685})^2 = (\sqrt{845} - |BD|)^2 + 10^2 - |BD|^2.$$

Stąd $|BD| = 2\sqrt{5}$.

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Obliczenie długości wszystkich boków trójkąta ABC : $|AB| = \sqrt{845}$, $|AC| = \sqrt{685}$, $|CB| = 10$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} |CB|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 \\ |CA|^2 = (|AB| - |BD|)^2 + |CD|^2 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zapisanie równania z niewiadomą BD : $(\sqrt{685})^2 = (\sqrt{845} - |BD|)^2 + 10^2 - |BD|^2$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD : $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

Zadanie 34. (5 pkt)

Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 km/h mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

I sposób rozwiązania

Niech v oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta B i niech t oznacza czas od chwili wyjazdu tego samochodu do chwili spotkania.

Obliczamy, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} v \cdot t = 300 \\ (v-17)(t-1) = 174 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie uwzględniając warunek $v \cdot t = 300$ otrzymujemy:

$$v = 143 - 17t.$$

Otrzymaną wartość v podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy:

$$17t^2 - 143t + 300 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby:

$$t_1 = \frac{75}{17} = 4\frac{7}{17} \text{ i } t_2 = 4.$$

$$\text{Stąd } v_1 = 68, v_2 = 75.$$

Odpowiedź: pierwsze rozwiązanie: $v_A = 51$ km/h, $v_B = 68$ km/h,

drugie rozwiązanie: $v_A = 58$ km/h, $v_B = 75$ km/h,

gdzie v_A oznacza prędkość samochodu jadącego z miasta A, a v_B oznacza prędkość samochodu jadącego z miasta B.

Uwaga

Możemy otrzymać inne równania kwadratowe z jedną niewiadomą:

$$17t_A^2 - 109t_A + 174 = 0 \quad \text{lub} \quad v_A^2 - 109v_A + 2958 = 0 \quad \text{lub} \quad v_B^2 - 143v_B + 5100 = 0.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Uwaga

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v_A, t_A oznaczających odpowiednio: prędkość i czas dla samochodu jadącego z miasta A oraz niewiadomych v_B, t_B oznaczających odpowiednio: prędkość i czas dla samochodu jadącego z miasta B. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Obliczenie, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.

Zapisanie równania:

$$(v_B - 17)(t_B - 1) = 174 \quad \text{lub} \quad (v_A + 17)(t_A + 1) = 300.$$

Uwaga

Przyznajemy **0 pkt**, jeżeli zdający zapisze tylko równanie $v_B \cdot t_B = 300$ lub $v_A \cdot t_A = 174$ lub odpowiednio zapisze, że $(v_B + 17) \cdot (t_B + 1) = 174$ lub $(v_A - 17) \cdot (t_A - 1) = 300$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań np.

$$\begin{cases} (v_B - 17)(t_B - 1) = 174 \\ v_B \cdot t_B = 300 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} v_A \cdot t_A = 174 \\ (v_A + 17)(t_A + 1) = 300 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Sprowadzenie do równania z jedną niewiadomą v_A lub t_A lub v_B lub t_B , np.

$$\left(\frac{174}{t_A} + 17\right)(t_A + 1) = 300 \quad \text{lub} \quad (v_A + 17)\left(\frac{174}{v_A} + 1\right) = 300$$
$$\text{lub} \quad \left(\frac{300}{t_B} - 17\right)(t_B - 1) = 174 \quad \text{lub} \quad (v_B - 17)\left(\frac{300}{v_B} - 1\right) = 174.$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).....4 pkt

• rozwiązanie równania z niewiadomą v_B z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczenie prędkości obu samochodów
albo

• rozwiązanie równania z niewiadomą t_A bezbłędnie: $t_A = 3 \text{ h}$ lub $t_A = \frac{58}{17} \text{ h} = 3\frac{7}{17} \text{ h}$
i nieobliczenie prędkości samochodu jadącego z miasta A
albo

• rozwiązanie równania z niewiadomą t_B bezbłędnie: $t_B = 4 \text{ h}$ lub $t_B = \frac{75}{17} \text{ h} = 4\frac{7}{17} \text{ h}$
i nieobliczenie prędkości samochodu jadącego z miasta B
albo

• obliczenie t_A lub t_B z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości v_A ,
 v_B
albo

• rozwiązanie równania kwadratowego i przyjęcie tylko jednego rozwiązania lub prędkości tylko jednego samochodu.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie prędkości obu samochodów: $\begin{cases} v_A = 58 \text{ km/h} \\ v_B = 75 \text{ km/h} \end{cases}$ lub $\begin{cases} v_A = 51 \text{ km/h} \\ v_B = 68 \text{ km/h} \end{cases}$

Uwaga

Zdający otrzymuje 5 punktów **tylko w przypadku**, gdy prawidłowo przyporządkuje prędkości.

II sposób rozwiązania

Niech v_A oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, zaś v_B oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta B oraz niech t oznacza czas od chwili wyjazdu samochodu z miasta B do chwili spotkania samochodów.

Obliczamy, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.

Zapisujemy równania: $v_A = \frac{174}{t-1}$, $v_B = \frac{300}{t}$, wówczas otrzymujemy równanie $\frac{174}{t-1} + 17 = \frac{300}{t}$.

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego $17t^2 - 143t + 300 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $t_1 = \frac{75}{17} = 4\frac{7}{17}$, $t_2 = 4$.

Dla $t_1 = \frac{75}{17} = 4\frac{7}{17}$ otrzymujemy $v_A = 51$, $v_B = 68$ oraz dla $t_2 = 4$ otrzymujemy $v_A = 58$, $v_B = 75$.

Odpowiedź: Pierwsze rozwiązanie $v_A = 51 \text{ km/h}$, $v_B = 68 \text{ km/h}$.

Drugie rozwiązanie $v_A = 58 \text{ km/h}$, $v_B = 75 \text{ km/h}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Uwaga

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v_A , v_B , t oznaczających odpowiednio: prędkość dla samochodu jadącego z miasta A, prędkość dla samochodu jadącego z miasta B oraz czas dla samochodu jadącego z miasta B.

Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.

Zapisanie równań na średnie prędkości samochodów wyjeżdżających z miasta A i z miasta B, np.

$$v_B = \frac{300}{t}, v_A = \frac{174}{t-1}.$$

Uwaga

Przyznajemy **0 pkt**, jeżeli zdający zapisze tylko równanie $v_B = \frac{300}{t}$ lub $v_A = \frac{174}{t-1}$ albo odpowiednio zapisze, że $v_A = \frac{174}{t+1}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania wymiernego z jedną niewiadomą, np. $\frac{174}{t-1} + 17 = \frac{300}{t}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- rozwiązanie równania z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczenie prędkości obu samochodów
- albo
- rozwiązanie równania i przyjęcie tylko jednego rozwiązania lub prędkości tylko jednego samochodu.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie prędkości obu samochodów: $\begin{cases} v_A = 58 \text{ km/h} \\ v_B = 75 \text{ km/h} \end{cases}$ lub $\begin{cases} v_A = 51 \text{ km/h} \\ v_B = 68 \text{ km/h} \end{cases}$

Uwaga

Zdający otrzymuje 5 punktów **tylko w przypadku**, gdy prawidłowo przyporządkuje prędkości.